

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-DEUXIÈME, 1948

SÉRIE I

**SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES
ET PHYSIQUES**

TROISIÈME ET DERNIER FASCICULE

30 DÉCEMBRE 1948



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique
et du Gouvernement belge*

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.48

1948

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 35 frs

TABLE DES MATIÈRES

PAGES

Session du 28 octobre 1948, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques

Sur des nombres curieux, par M. V. Thébault	101
Remarque sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles; extension à des systèmes normaux de forme générale (2 ^e note), par M. R. H. J. Germy	109

DEUXIÈME SECTION : Sciences physiques et chimiques

Sur un problème relatif à l'astigmatisme du dioptré, par M. A. Biot ...	114
Dépolarisation produite par une suspension de particules isotropes sur un faisceau de lumière polarisée observé dans la direction de propagation, par M. A. Boutaric et M ^{lle} P. Berthier	120
Azéotropes orthobares de nitrates, par M. M. Lecat	128

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

<i>en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg</i>	70 fr.
<i>dans les autres pays</i>	120 fr.

SESSION DU 28 OCTOBRE 1948
A LOUVAIN

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

Sur des nombres curieux

PAR

VICTOR THÉBAULT, Tennie (France)

I. CARRÉS DES FORMES, $aabb = (cc)^2$ ET $bbaa = (dd)^2$ DANS UN SYSTÈME DE NUMÉRATION DE BASE B.

A propos de ces carrés de quatre chiffres, nous avons montré que les nombres entiers positifs B, a, b, c, d sont liés nécessairement par les relations ⁽¹⁾

$$(1) \quad c^2 = a \cdot (B - 1) + 1, \quad d^2 = b \cdot (B - 1) + 1, \quad (2)$$

$$(3) \quad a + b = B + 1, \quad c^2 + d^2 = B^2 + 1. \quad (4)$$

La recherche de ces carrés est donc liée à l'équation (4) possédant une infinité de solutions qui ne semblent pas résulter d'une loi générale de formation. Mais il est possible de procéder par des moyens artificiels.

1. L'équation (1) suggère les suivantes,

$$m(c - 1) = n(B - 1) \quad \text{et} \quad n(c + 1) = ma,$$

où m, n sont des entiers positifs arbitraires, ($m > n$).

Il en résulte, d'abord,

$$(5) \quad c = \frac{ma - n}{n},$$

ensuite,

$$(6) \quad B = \frac{1}{n^2} [m^2a - n(2m - n)], \quad b = \frac{1}{n^2} (m - n)[ma + n(a - 2)]. \quad (7)$$

⁽¹⁾ *Mathesis*, 1936, (Supplément).

Pour que c , B , b soient entiers, il faut et il suffit que l'on ait à la fois,

$$ma = Mn \text{ et } m(ma - 2n) = Mn^2.$$

EXEMPLE. — $m = 2$, $n = 1$. Dans ce cas,

$$c = \overline{2a-1}, B = \overline{4a-3}, b = \overline{3a-2}; \overline{aa} \overline{3a-2} \overline{3a-2} = (\overline{2a-1} \overline{2a-1})^2,$$

$$\text{Si } a = \overline{21}, c = \overline{41}, B = \overline{81}, b = \overline{61}; \overline{21} \overline{21} \overline{61} \overline{61} = (\overline{41} \overline{41})^2.$$

Lorsque, en outre, les équations (1), (2) sont vérifiées, à la fois, la dernière, dans laquelle on introduit (6) et (7), conduit à l'équation de LAGRANGE

$$(8) \quad (m - n)[m(m+n)a - n(2m+n)]^2 - (m+n)n^4d^2 = -2n^5.$$

EXEMPLES. — 1°) $m = 2$, $n = 1$. L'équation (8) devient

$$(9) \quad (6a - 5)^2 - 3d^2 = -2$$

et fournit les carrés

$$\overline{45} \overline{45} \overline{133} \overline{133} = (\overline{89} \overline{89})^2, \overline{133} \overline{133} \overline{45} \overline{45} = (\overline{153} \overline{153})^2$$

dans la base $B = 177$.

2°) $m = 3$, $n = 2$. On a l'équation

$$(10) \quad (15a - 16)^2 - 80d^2 = -64$$

et les carrés

$$\overline{174} \overline{174} \overline{140} \overline{140} = (\overline{233} \overline{233})^2, \overline{140} \overline{140} \overline{174} \overline{174} = (\overline{209} \overline{209})^2,$$

pour $B = 313$.

3°) $m = 4$, $n = 3$. L'équation

$$(11) \quad (28a - 33)^2 - 567d^2 = -486,$$

donne

$$\overline{150} \overline{150} \overline{116} \overline{116} = (\overline{199} \overline{199})^2, \overline{116} \overline{116} \overline{150} \overline{150} = (\overline{175} \overline{175})^2,$$

avec $B = 265$.

Toutes les valeurs de a et d qui vérifient ces équations ne conviennent pas, il faut procéder à des essais.

2. — D'après les égalités (1) à (4), lorsque B est un nombre impair, c , d le sont aussi et a , b sont de même parité, de sorte que, dans ce cas, on peut toujours poser

$$a - b = 2\Delta \quad \text{ou} \quad b - a = 2\Delta,$$

selon que $a > b$ ou $b > a$.

Dans cette hypothèse faite sur B, si l'on fait intervenir Δ dans les conditions (1) à (4), on a, soit

$$2a = B + 1 + 2\Delta,$$

et, à la fois, les équations

$$(12) (\Delta + 1)^2 + 2(c^2 - 1) = (B + \Delta)^2, (\Delta - 1)^2 + 2(d^2 - 1) = (B - \Delta)^2, (13)$$

soit

$$2a = B + 1 - 2\Delta$$

et, à la fois, les équations

$$(14) (\Delta - 1)^2 + 2(c^2 - 1) = (B - \Delta)^2, (\Delta + 1)^2 + 2(d^2 - 1) = (B + \Delta)^2. (15)$$

Pour la commodité ces équations peuvent s'écrire

$$(16) 2(c-1)(c+1) = (m-x)(m+x), 2(d-1)(d+1) = (n-y)(n+y), (17)$$

$$(19) 2(c-1)(c+1) = (n-y)(n+y), 2(d-1)(d+1) = (m-x)(m+x), (20)$$

en posant

$$B + \Delta = m, B - \Delta = n, \Delta + 1 = x, \Delta - 1 = y.$$

c et d étant impairs, $c - 1$ et $c + 1$, $d - 1$ et $d + 1$ ne peuvent admettre que le diviseur commun 2.

Cas particulier où m et n sont premiers absolus impairs.

$m - x$ et $m + x$, $n - y$ et $n + y$ n'ont d'autre diviseur commun que 2, car les nombres

$$2m = m - x + m + x, 2n = n - y + n + y$$

ne peuvent diviser $m \pm x$ et $n \pm y$ que si

$$(21) \quad x = \Delta + 1 = 0, y = \Delta - 1 = 0.$$

Lorsque m et n sont plus grands que 2, les équations (16) et (17) sont équivalentes aux suivantes,

$$(22) \quad \frac{m-x}{4} \cdot \frac{m+x}{2} = \frac{c-1}{2} \cdot \frac{c+1}{2} = \frac{m-x}{2} \cdot \frac{m+x}{4}, (23)$$

$$(24) \quad \frac{n-y}{4} \cdot \frac{n+y}{2} = \frac{d-1}{2} \cdot \frac{d+1}{2} = \frac{n-y}{2} \cdot \frac{n+y}{4}, (25)$$

et les facteurs qui figurent dans chacun de leurs membres sont premiers entre eux.

A. EQUATION (22). Si p et q sont les p. g. c. d. de $\frac{c-1}{2}$ et $\frac{m-x}{4}$ et de $\frac{c+1}{2}$ et $\frac{m+x}{2}$, on a

$$\frac{c-1}{2} = p \cdot A, \frac{m-x}{4} = p \cdot C, \frac{c+1}{2} = q \cdot B, \frac{m+x}{2} = q \cdot D,$$

A et C étant des entiers premiers entre eux ainsi que B et D. De plus, p et q sont premiers entre eux, B premier avec A et D divise C; C premier avec D et A divise B. On a donc nécessairement $B = C$ et $A = D$ ce qui entraîne les égalités

$$(26) \quad q \cdot (c-1) = p \cdot (m+x), \quad 2p \cdot (c+1) = q \cdot (m+x), \quad (27)$$

desquelles on déduit, d'abord,

$$(28) \quad c = \frac{p(mq-2p)+q(mp+q)}{2p^2+q^2}, \quad x = \frac{q(mq-2p)-2p(mp+q)}{2p^2+q^2}, \quad (29)$$

puis

$$(30) \quad B = \frac{4p(mp+q)}{2p^2+q^2} + 1,$$

et enfin

$$(31) \quad a = \frac{q(mq-2p)}{2p^2+q^2}, \quad b = \frac{4p(mp+q)-q(mq-2p)}{2p^2+q^2} + 2. \quad (32)$$

Pour que B, a soient entiers, il faut et il suffit que $2p^2+q^2$ divise, à la fois, $mp+q$ et $mq-2p$, car $2p^2+q^2$ est un nombre impair premier avec p et q . Cette condition remplie, x, c, b sont des nombres entiers,

De plus, $2p^2+q^2$ divise alors

$$2(mp+q) + m(mq-2p) = q \cdot (m^2+2)$$

et par suite m^2+2 . Or, les diviseurs de $m^2+2 = m^2+2 \cdot 1^2$ sont décomposables en la somme $2p^2+q^2$ d'un carré et du double d'un carré de deux nombres premiers entre eux p et q . m étant un nombre premier impair donné, la recherche de p et q revient à déterminer les diviseurs de m^2+2 pour lesquels les formules (28) à (32) se réduisent à des entiers B, a, b, c ,

EXEMPLE. $m = 103$; $m^2+2 = 3^4 \cdot 131$.

$$131 = 2 \cdot 5^2 + 9^2 = 2p^2 + q^2, \quad p = 5, \quad q = 9.$$

Les relations (28) à (32) donnent

$$B = 81, \quad a = \overline{63}, \quad b = \overline{19}, \quad c = \overline{71}; \quad \overline{63} \overline{63} \overline{19} \overline{19} = (\overline{71} \overline{71})^2.$$

Les équations (23) à (25) et toutes celles qui dérivent des égalités (18) à (21) se traitent de la même manière,

B. ÉQUATION (25). Lorsque $\frac{d-1}{2}, \frac{d+1}{2}, \frac{n-y}{2}, \frac{n+y}{4}$ sont premiers entre eux deux à deux, on a successivement,

$$(33) \quad d = \frac{1}{3} (2n - 1), \quad y = \frac{1}{3} (n + 4), \quad B = \frac{1}{3} (4n + 7),$$

$$b = \frac{1}{3} (n - 2), \quad a = n + 4. \quad (34)$$

Pour que ces nombres soient entiers, il faut et il suffit que

$$n \equiv 1 \pmod{3}$$

EXEMPLE. $n = 59$. Les formules (33), (34) donnent

$$B = 81, \quad a = \overline{63}, \quad b = \overline{19}, \quad d = \overline{39},$$

et la résolution simultanée, des équations (22) et (25), dans les cas envisagés, les carrés

$$\overline{63} \overline{63} \overline{19} \overline{19} = (\overline{71} \overline{71})^2 \quad \text{et} \quad \overline{19} \overline{19} \overline{63} \overline{63} = (\overline{39} \overline{39})^2$$

des formes $aabb = (cc)^2$ et $bbaa = (dd)^2$ dans le système de numération de base $B = 81$.

II. SUR LES NOMBRES TERMINAUX DES CARRÉS PARFAITS.

1. — Les trois derniers chiffres c, d, u des centaines, dizaines et unités des carrés consécutifs forment une période de 501 nombres cdu symétriques par rapport à ceux qui terminent le carré, de 250, ou par rapport à ceux qui terminent le carré de 500.

Ces périodes de 501 nombres comprennent 159 nombres différents dont nous avons donné la liste. ⁽¹⁾

2. THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour que le carré d'un nombre entier N se termine par un nombre de trois chiffres, pris dans cette liste, dont le dernier chiffre n'est ni 0 ni 5, est que le nombre N soit l'une des formes*

$$250n \mp N_0, \quad 500n \mp N_0.$$

(1) *Mathesis*, 1943 — *Les Récréations mathématiques*, p. 62.

selon que cdu est impair ou pair, n étant un entier positif arbitraire, N_o le plus petit nombre dont le carré est terminé par cdu .

La condition est nécessaire. Soit un nombre N dont le carré

$$N^2 = 1000x + cdu$$

se termine par un nombre donné cdu de trois chiffres pris dans la liste en cause, le chiffre u des unités n'étant ni 0 ni 5.

N_o^2 étant le plus petit carré de cette forme qu'il est facile de trouver dans la table des carrés des nombres entiers consécutifs, on a

$$(1) \quad N^2 - N_o^2 = (N - N_o) \cdot (N + N_o) = M \cdot 1000 = M (2^3 \cdot 5^3).$$

N et N_o sont de même parité et l'un seulement des nombres $N - N_o$ et $N + N_o$ est divisible par 5, sinon

$$N - N_o + N + N_o = 2N,$$

et par suite N , serait divisible par 5 contrairement à l'hypothèse. Ainsi, l'un des facteurs $(N - N_o)$ et $(N + N_o)$ est multiple de 125; de plus, ils sont tous deux divisibles par 2 et l'un d'eux l'est par 4 de sorte que si N_o est pair, ils sont tous deux multiples de 4. Par conséquent, si N_o est impair, N est de la forme

$$(2) \quad N = 250n \pm N_o;$$

si N_o est pair, N est de la forme

$$(3) \quad N = 500n \pm N_o.$$

La condition est suffisante. Si N , impair, est de l'une des formes (2), on a, de proche en proche,

$$\begin{aligned} N^2 &= (250n \pm N_o)^2 = 62500n^2 \pm 2 \cdot 250n \cdot N_o + N_o^2 \\ &= 500n(125n \pm N_o) + N_o^2. \end{aligned}$$

Or $n(125n \pm N_o)$ est un nombre pair et N^2 qui peut alors se mettre sous la forme

$$N^2 = 1000y + N_o^2$$

est terminé, comme N_o^2 , par le nombre cdu .

Lorsque N est de l'une des formes (3),

$$N^2 = (500n \pm N_o)^2 = 1000n(250n \pm N_o) + N_o^2$$

COROLLAIRE. Lorsque $u = 0$ et $u = 5$, les nombres N dont les carrés se terminent par 000, 100, 400, 600, 900, sont de l'une des formes $100n$, $100n \pm 10$, $100n \pm 20$, $100n \pm 30$

et ceux qui finissent par 025, 225, 625, de l'une des formes

$$50n \pm 5, 50n \pm 15, 50n \pm 25,$$

et réciproquement.

3. Si on relève dans une table des carrés ceux qui se terminent par un nombre donné cdu , on retrouve directement les formules (2) et (3) par des sommations assez curieuses comme M. PIZA vient de le faire sur un exemple particulier. (1)

1°) *Le nombre N_o est impair.* Soient N, N_1, N_2, N_3, \dots , les nombres successifs dont les carrés finissent par un nombre de trois chiffres cdu , avec la seule restriction déjà indiquée pour le chiffre u . On a

$$N_1 = 250 - N_o = N_o + (250 - 2N_o) = N_o + 4k,$$

$$(4) \quad N_2 = 250 + N_o = N_o + 4k + 2N_o,$$

$$N_3 = 2.250 - N_o = N_o + 4k + 2N_o + 4k,$$

$$N_4 + 2.250 + N_o = N_o + 4k + 2N_o + 4k + 2N_o, \dots$$

De plus, les carrés de ces nombres peuvent s'écrire

$$(5) \quad N_o^2 = 1000x_o + cdu, \quad N_1^2 = 1000x_1 + cdu, \quad N_2^2 = 1000x_2 + cdu, \dots,$$

et les égalités (4) et (5) combinées donnent

$$(6) \quad x_1 = x_o + k, \quad x_2 = x_o + k + N_o, \quad x_3 = x_o + k + N_o + 3k;$$

$$x_4 = x_o + k + N_o + 3k + 2N_o, \quad x_5 = x_o + k + N_o + 3k + 2N_o + 5k, \dots$$

Ces relations mettent en évidence la suite des nombres impairs consécutifs et celle des entiers consécutifs parmi les coefficients de k et de N_o . Or,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2,$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1).$$

Dans la suite (6), le nombre x_p qui contient n termes en k est donc de l'une des formes

$$x_p = x_o + n^2 \cdot k + \frac{1}{2} n(n \pm 1) \cdot N_o,$$

le signe — correspondant aux indices impairs de x et le signe + aux indices pairs.

N_p^2 est donc de l'une des formes

(1) *The American Mathematical Monthly*, 1948 — 20.

$N_p^2 = 1000x_p + cdu = 500 \cdot [2x_o + 2n^2k + n(n \pm 1) \cdot N_o] + cdu$
qui se réduit, de proche en proche, à

$$\begin{aligned} N_p^2 &= 1000n^2k + 500n(n \pm 1) \cdot N_o + 1000x_o + cdu \\ &= 1000n^2 \cdot (125 - N_o) + 500n(n \pm 1) \cdot N_o + N_o^2 \\ &= 62500n^2 \pm 500n \cdot N_o + N_o^2 = (250n \pm N_o)^2. \end{aligned}$$

EXEMPLE, $cdu = 521$, $N_o = 39$, $k = 43$.

$$\begin{array}{ll} 39^2 = 1521 & 539^2 = 290521 \\ 211^2 = 44521 & 711^2 = 505521 \\ 289^2 = 83521 & 789^2 = 622521 \\ 461^2 = 212521 & 961^2 = 923521, \dots \end{array}$$

2°) Le nombre N_o est pair. De la même manière, on a

$$\begin{aligned} N_1 &= 500 - N_o = N_o + (500 - 2N_o) = N_o + 2k, \\ (7) \quad N_2 &= 500 + N_o = N_o + 2k + 2N_o, \\ N_3 &= N_o + 2k + 2N_o + 2k, \\ N_4 &= N_o + 2k + 2N_o + 2k + 2N_o, \dots, \end{aligned}$$

puis, en combinant les relations (6) et (7),

$$\begin{aligned} x_1 &= x_o + 250 - N_o = x_o + k, \quad x_2 = x_o + k + 2N_o, \\ (8) \quad x_3 &= x_o + k + 2N_o + 3k, \quad x_4 = x_o + k + 2N_o + 3k + 4N_o, \\ x_5 &= x_o + k + 2N_o + 3k + 4N_o + 5k, \dots \end{aligned}$$

La suite des nombres impairs consécutifs et celle des nombre pairs consécutifs formant celle des coefficients de k et de N_o dans la suite (8), on a, d'après la relation

$$0 + 2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1),$$

$$x_p = x_o + n^2 \cdot k + n \cdot (n \pm 1) \cdot N_o$$

et

$$N_p = 500n \pm N_o$$

EXEMPLE. $cdu = 896$, $N_o = 164$, $k = 86$.

$$\begin{array}{ll} 164^2 = 26896 & 1164^2 = 1354896 \\ 336^2 = 112896 & 1664^2 = 2768896 \\ 664^2 = 440896 & 2164^2 = 4682896 \\ 836^2 = 698896 & 2664^2 = 7096896, \dots \end{array}$$

Remarque sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles ; extension à des systèmes normaux de forme générale (2^{de} note)

PAR

R. H. J. GERMA
professeur à l'Université de Liège

§ 1. — Dans une note antérieure, publiée sous le même titre ⁽¹⁾, nous avons étendu à des systèmes différentiels normaux de forme générale, la méthode d'intégration par approximations successives imaginée par le Général Céressia pour les systèmes linéaires d'équations différentielles.

Nous avons considéré, pour fixer les idées, un système normal de trois équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, y_2, y_3) \quad , \quad (j = 1, 2, 3) \quad ,$$

et supposé que les fonctions réelles $f_j(x, y_1, y_2, y_3)$ des quatre variables réelles x, y_1, y_2, y_3 sont définies et continues dans le champ de variation

$$(2) \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad y_j^o - b_j \leq y_j \leq y_j^o + b_j, \quad (j = 1, 2, 3),$$

où elles satisfont aux conditions de Lipschitz

$$(3) \quad \begin{cases} |f_j(x, y_1, y_2, y_3) - f_j(x, y_1^*, y_2^*, y_3^*)| \\ < k_{j1} |y_1 - y_1^*| + k_{j2} |y_2 - y_2^*| + k_{j3} |y_3 - y_3^*|, \quad (j=1, 2, 3). \end{cases}$$

Nous avons désigné par M_j ($j = 1, 2, 3$) la borne supérieure de $|f_j|$ dans le champ de variation (2), par M le plus grand des M_j , par b

(1) Voir : *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, 1947, pp. 119-125.

le plus petit des b_j , par h le plus petit des nombres a et $\frac{b}{M}$ et nous avons alors considéré les valeurs de x satisfaisant à la condition

$$(4) \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h.$$

Partant des valeurs initiales y_1^0, y_2^0, y_3^0 nous avons ensuite construit de proche en proche les termes successifs des trois suites indéfinies

$$(5) \quad y_{j1}(x), y_{j2}(x), \dots, y_{j,\mu}(x), y_{j,\mu+1}(x), \dots \quad (j = 1, 2, 3)$$

au moyen des formules récurrentes

$$(6) \quad \begin{cases} y_{1,\mu+1}(x) = y_1^0 + \int_{x_0}^x f_1[t; y_{1,\mu}(t), y_{2,\mu}(t), y_{3,\mu}(t)] dt, \\ y_{2,\mu+1}(x) = y_2^0 + \int_{x_0}^x f_2[t; y_{1,\mu+1}(t), y_{2,\mu}(t), y_{3,\mu}(t)] dt, \\ y_{3,\mu+1}(x) = y_3^0 + \int_{x_0}^x f_3[t; y_{1,\mu+1}(t), y_{2,\mu+1}(t), y_{3,\mu}(t)] dt. \end{cases}$$

Nous avons enfin établi que les suites (5) convergent uniformément vers les intégrales du système différentiel (1), fonctions continues de x dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$ prenant en x_0 les valeurs y_1^0, y_2^0, y_3^0 .

§ 2. — Désignons ces intégrales par $Y_1(x), Y_2(x), Y_3(x)$ et proposons-nous de chercher une limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur commise en substituant à la considération des intégrales elles-mêmes celle de leurs approximations de rang μ . Nous avons les identités

$$(7) \quad Y_j(x) = y_j^0 + \int_{x_0}^x f_j[t; Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)] dt, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Désignons par k_j le plus grand des nombres $k_{j,1}, k_{j,2}, k_{j,3}, (j=1,2,3)$.

Les formules (6) et (7), jointes aux conditions de Lipschitz (3) donnent

$$(8) \quad \begin{cases} |Y_1(x) - y_{1,\mu+1}(x)| < k_1 \int_{x_0}^x |Y_1(t) - y_{1,\mu}(t)| + |Y_2(t) - y_{2,\mu}(t)| + |Y_3(x) - y_{3,\mu}(x)| dt, \\ |Y_2(x) - y_{2,\mu+1}(x)| < k_2 \int_{x_0}^x |Y_1(x) - y_{1,\mu+1}(t)| + |Y_2(t) - y_{2,\mu}(t)| + |Y_3(t) - y_{3,\mu}(t)| dt, \\ |Y_3(x) - y_{3,\mu+1}(x)| < k_3 \int_{x_0}^x |Y_1(t) - y_{1,\mu+1}(t)| + |Y_2(t) - y_{2,\mu+1}(t)| + |Y_3(t) - y_{3,\mu}(t)| dt. \end{cases}$$

En posant, pour abréger,

$$(9) \quad \Delta_{j,\mu}^*(x) = |Y_j(x) - y_{j,\mu}(x)|, \quad (j = 1, 2, 3),$$

les formules (8) s'écrivent

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta_{1,\mu+1}^*(x) < k_1 \int_{x_0}^x \{ \Delta_{1,\mu}^*(t) + \Delta_{2,\mu}^*(t) + \Delta_{3,\mu}^*(t) \} dt, \\ \Delta_{2,\mu+1}^*(x) < k_2 \int_{x_0}^x \{ \Delta_{1,\mu+1}^*(t) + \Delta_{2,\mu}^*(t) + \Delta_{3,\mu}^*(t) \} dt, \\ \Delta_{3,\mu+1}^*(x) < k_3 \int_{x_0}^x \{ \Delta_{1,\mu+1}^*(t) + \Delta_{2,\mu+1}^*(t) + \Delta_{3,\mu}^*(t) \} dt. \end{cases}$$

Ces formules sont analogues aux formules (14) de la note ci-dessus rappelée. On en déduit, par les raisonnements détaillés dans cette note, l'inégalité

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta_{1,\mu+1}^*(x) + \Delta_{2,\mu+1}^*(x) + \Delta_{3,\mu+1}^*(x) \\ < (k_1 + k_2 + k_3) \int_{x_0}^x \{ \Delta_{1,\mu}^*(t) + \Delta_{2,\mu}^*(t) + \Delta_{3,\mu}^*(t) \} dt \\ + (k_2 k_3 + k_3 k_1 + k_1 k_2) \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t \{ \Delta_{1,\mu}^*(u) + \Delta_{2,\mu}^*(u) + \Delta_{3,\mu}^*(u) \} du \\ + k_1 k_2 k_3 \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^u \int_{x_0}^v \{ \Delta_{1,\mu}^*(v) + \Delta_{2,\mu}^*(v) + \Delta_{3,\mu}^*(v) \} dv. \end{cases}$$

Cette formule est elle-même analogue à l'inégalité (19) de la note précédente.

Or, on a directement d'après les formules (7)

$$(12) \quad |Y_j(x) - y_j^0| < M_j(x - x_0) \leq b_j, \quad (j = 1, 2, 3),$$

car

$$(13) \quad |f_j[t; Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)]| \leq M_j, \quad (j = 1, 2, 3),$$

lorsque t varie dans l'intervalle d'intégration (x_0, x) .

Ainsi

$$(14) \quad \Delta_{1,0}^*(x) + \Delta_{2,0}^*(x) + \Delta_{3,0}^*(x) < M \frac{x - x_0}{1!},$$

moynnant l'abréviation

$$(15) \quad M = M_1 + M_2 + M_3.$$

On peut encore écrire

$$(16) \quad \Delta_{1,0}^*(x) + \Delta_{2,0}^*(x) + \Delta_{3,0}^*(x) < \Omega_0 \frac{x - x_0}{1!}, \quad \Omega_0 = M.$$

La formule (11) où l'on fait $\mu = 0$ donne alors par un calcul facile

$$(17) \quad \Delta_{1,1}^*(x) + \Delta_{2,1}^*(x) + \Delta_{3,1}^*(x) < \Omega_1 \left(\frac{x - x_0}{2!} \right)^2,$$

moyennant les abréviations

$$(18) \quad \Omega_1 = \beta \Omega_0, \quad \beta = k_1 + k_2 + k_3 + (k_2 k_3 + k_3 k_1 + k_1 k_2) \frac{h}{3} + k_1 k_2 k_3 \cdot \frac{h^2}{12}.$$

On est conduit à penser que

$$(19) \quad \Delta_{1,\mu}^*(x) + \Delta_{2,\mu}^*(x) + \Delta_{3,\mu}^*(x) < \Omega_\mu \frac{(x - x_0)^{\mu+1}}{(\mu + 1)!},$$

Ω_μ désignant un nombre positif fixe.

La formule (11) donne, si l'on admet (19)

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta_{1,\mu+1}^*(x) + \Delta_{2,\mu+1}^*(x) + \Delta_{3,\mu+1}^*(x) < (k_1 + k_2 + k_3) \cdot \Omega_\mu \cdot \frac{(x - x_0)^{\mu+2}}{(\mu + 2)!} \\ &+ (k_2 k_3 + k_3 k_1 + k_1 k_2) \cdot \Omega_\mu \cdot \frac{(x - x_0)^{\mu+3}}{(\mu + 3)!} + k_1 k_2 k_3 \cdot \Omega_\mu \cdot \frac{(x - x_0)^{\mu+4}}{(\mu + 4)!} \end{aligned} \right.$$

et a fortiori

$$(21) \quad \Delta_{1,\mu+1}^*(x) + \Delta_{2,\mu+1}^*(x) + \Delta_{3,\mu+1}^*(x) < \Omega_{\mu+1} \frac{(x - x_0)^{\mu+2}}{(\mu + 2)!}$$

moyennant l'abréviation

$$(22) \quad \Omega_{\mu+1} = \beta \Omega_\mu,$$

La formule (19) est générale. Elle permet d'écrire

$$(23) \quad \Delta_{1,\mu}^*(x) + \Delta_{2,\mu}^*(x) + \Delta_{3,\mu}^*(x) < M \beta^\mu \cdot \frac{(x - x_0)^{\mu+1}}{(\mu + 1)!}$$

Le second membre de la formule (23) est supérieur à la somme des modules des erreurs commises sur les intégrales $Y_j(x)$ en leur substituant leurs approximations de rang μ . Il est à plus forte raison une limite supérieure du module de l'erreur commise sur chacune des intégrales.

§ 3. *Approximation des dérivées premières des solutions.* — Les formules (7) et (6) nous permettent d'écrire

$$(24) \quad \frac{dY_j}{dx} = f_j[x, Y_1(x), Y_2(x), Y_3(x)], \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{dy_{1,\mu+1}}{dx} = f_1[x; y_{1,\mu}(x), y_{2,\mu}(x), y_{3,\mu}(x)], \\ \frac{dy_{2,\mu+1}}{dx} = f_2[x; y_{1,\mu+1}(x), y_{2,\mu}(x), y_{3,\mu}(x)], \\ \frac{dy_{3,\mu+1}}{dx} = f_3[x; y_{1,\mu+1}(x), y_{2,\mu+1}(x), y_{3,\mu}(x)]. \end{cases}$$

Nous en déduisons immédiatement

$$(26) \quad \begin{cases} \left| \frac{dY_1}{dx} - \frac{dy_{1,\mu+1}}{dx} \right| < k_1 \{ \Delta_{1,\mu}^*(x) + \Delta_{2,\mu}^*(x) + \Delta_{3,\mu}^*(x) \}, \\ \left| \frac{dY_2}{dx} - \frac{dy_{2,\mu+1}}{dx} \right| < k_2 \{ \Delta_{1,\mu+1}^*(x) + \Delta_{2,\mu}^*(x) + \Delta_{3,\mu}^*(x) \}, \\ \left| \frac{dY_3}{dx} - \frac{dy_{3,\mu+1}}{dx} \right| < k_3 \{ \Delta_{1,\mu+1}^*(x) + \Delta_{2,\mu+1}^*(x) + \Delta_{3,\mu}^*(x) \}. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=3} \left| \frac{dY_j}{dx} - \frac{dy_{j,\mu+1}}{dx} \right| &< k_1 \{ \Delta_{1,\mu}^*(x) + \Delta_{2,\mu}^*(x) + \Delta_{3,\mu}^*(x) \} + k_2 \{ \Delta_{2,\mu}^*(x) + \Delta_{3,\mu}^*(x) \\ &+ k_3 \Delta_{3,\mu}^*(x) + (k_2 + k_3) \Delta_{1,\mu+1}^*(x) + k_3 \Delta_{2,\mu+1}^*(x) \}. \end{aligned}$$

plus forte raison

$$\sum_{j=1}^{j=3} \left| \frac{dY_j}{dx} - \frac{dy_{j,\mu+1}}{dx} \right| < (k_1 + k_2 + k_3) \left\{ \begin{aligned} &\Delta_{1,\mu}^*(x) + \Delta_{2,\mu}^*(x) + \Delta_{3,\mu}^*(x) \\ &+ \Delta_{1,\mu+1}^*(x) + \Delta_{2,\mu+1}^*(x) + \Delta_{3,\mu+1}^*(x) \end{aligned} \right\}.$$

En moyennant la formule (23), il vient enfin

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=3} \left| \frac{dY_j}{dx} - \frac{dy_{j,\mu+1}}{dx} \right| &< (k_1 + k_2 + k_3) \left[M \beta^\mu \cdot \frac{(x-x_0)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + M \beta^{\mu+1} \cdot \frac{(x-x_0)^{\mu+2}}{(\mu+2)!} \right] \\ 30) \quad \sum_{j=1}^{j=3} \left| \frac{dY_j}{dx} - \frac{dy_{j,\mu+1}}{dx} \right| &< (k_1 + k_2 + k_3) M (1 + \beta h) \cdot \beta^\mu \cdot \frac{(x-x_0)^{\mu+1}}{(\mu+1)!}. \end{aligned}$$

Saive, le 8 octobre 1948.

Sur un problème relatif à l'astigmatisme du dioptré

PAR

M. A. BIOT

1. LE PROBLÈME. — Il s'agit de l'étude de l'astigmatisme du dioptré quand on place le diaphragme en un point aplanétique. Ce cas peut être d'intérêt dans certaines questions relatives aux objectifs de microscope puissants. Ces objectifs, en effet, comportent comme lentille frontale une demi-boule suivie parfois d'un ménisque qui sont tous deux, sensiblement, utilisés en leurs points aplanétiques.

2. FORMULES FONDAMENTALES. — Le rayon incident est le rayon AB (fig. 1). Il se réfracte suivant (A')BD. Les angles d'incidence et de réfraction sont respectivement i et i' , le rayon de courbure, r .

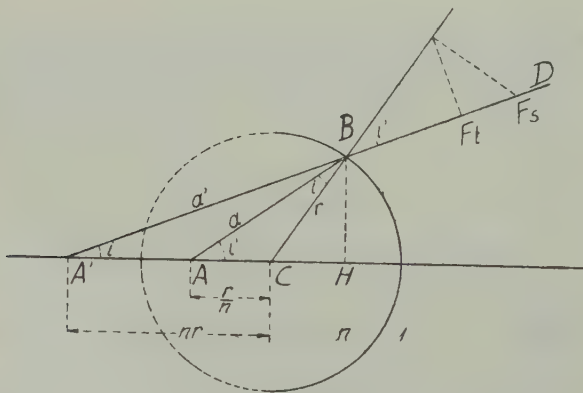


FIG. 1

Représentons BA par a , BA' par a' . On voit facilement que, si A et A' sont les points aplanétiques ($CA = \frac{r}{n}$, $CA' = nr$), angle

CAB = i' , angle CA'B = i , et $a' = na$, pour la radiation monochromatique considérée.

Dans ces conditions, les formules générales qui donnent les positions, sur le rayon réfracté, des focales sagittales et tangentielles en fonction des positions de ces mêmes focales sur le rayon incident sont

$$\frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} \quad \text{et} \quad \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} \quad (1)$$

Elles deviennent, avec $n' = 1$

$$\frac{n}{s} = \frac{\cos i' - n \cos i}{r} \quad \frac{\cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos i}{t} = \frac{\cos i' - n \cos i}{r} \quad (1')$$

Projetant BA' et BA sur l'axe optique, on a

$$a' \cos i - a \cos i' = na \cos i - a \cos i' = nr - \frac{r}{n} = \frac{r(n-1)}{n}$$

D'où

$$n \cos i - \cos i' = \frac{r(n-1)}{an} \quad (2)$$

Introduisons (2) dans (1')

$$\frac{1}{s'} - \frac{n}{s} = -\frac{r(n-1)}{a'} \quad \dots \quad \frac{\cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos i}{t} = -\frac{r(n-1)}{a'} \quad (3)$$

3. DISCUSSION. I. $s = t = a$.

Si l'on porte dans (3) ces valeurs de s et t , on trouve facilement

$$s' = t' = an = a'$$

En d'autres termes, le point A forme son image en A' sans astigmatisme quel que soit i . On retrouve ici la propriété fondamentale des points aplanétiques.

4. DISCUSSION. II. Foyers.

Si $s = t = \infty$, on a

$$\left. \begin{aligned} s' &= -\frac{an}{n^2 - 1} = -\frac{a'}{n^2 - 1} = a' \times C^{te} \\ t' &= -\frac{a' \cos^2 i'}{n^2 - 1} = s' \cos^2 i' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

La première des formules (4) indique que le lieu des foyers sagittaux est une circonférence (dans le plan méridien). En effet la distance de ces foyers à A' vaut $a' \times C^{ie} + a' = a' \times C^{ie}$. La figure formée par A' et le lieu des foyers sagittaux est donc semblable à celle qui est formée par A' et le dioptré donné. Le centre de la circonférence focale

se trouve dans le dioptré, à une distance $-\frac{nr}{n^2-1}$ au-delà du centre.

Nous trouverons plus loin un résultat analogue sous une forme plus générale.

Une fois connue la position du foyer sagittal sur le rayon réfracté, celle du foyer tangentiel correspondant se déduit de la première, d'après la seconde des formules (4) par une double projection du segment focal BF_s d'abord sur le rayon CB qui passe par le point d'incidence puis à nouveau sur BD. Le lieu des foyers tangentiels n'est plus une circonférence.

5. DISCUSSION. III. Cas général.

$$\text{De } \frac{1}{s'} - \frac{n}{s} = -\frac{n^2-1}{a'}, \text{ on tire}$$

$$s' = -\frac{a's}{s(n^2-1) - a'n} = -a' \frac{s}{s(n^2-1) - a'n}$$

Recherchons la condition pour que le lieu des focales soit une circonférence. Il faut et il suffit pour cela que

$$\frac{s}{s(n^2-1) - a'n} = C^{ie} = \alpha$$

c'est-à-dire

$$s = \alpha s(n^2-1) - \alpha a'n$$

$$s = -a' \frac{\alpha n}{1 - \alpha(n^2-1)} = a' \times C^{ie}$$

On voit donc que si le lieu des focales sagittales objets est une circonférence, le lieu des focales sagittales images en est une autre.

Le lieu des focales tangentiels n'est en général pas une circonférence dans les mêmes conditions.

6. ÉQUATIONS DES LIEUX DES FOYERS.

a. Foyers sagittaux.

Appelons x, y les coordonnées d'un point du dioptré, les axes de coordonnées, rectangulaires, ayant leur origine en C, l'axe des x étant dirigé suivant l'axe optique du dioptré. Soient ξ_s, η_s les coordonnées d'un point du lieu. On a (fig. 1)

$$\xi_s = x + \Delta x_s = x + \frac{nr + x}{n^2 - 1} = x \frac{n^2}{n^2 - 1} - \frac{nr}{n^2 - 1}$$

$$\eta_s = y + \Delta y_s = y + \frac{y}{n^2 - 1} = y \frac{x^2}{n^2 - 1}$$

Il suit

$$\left(\xi_s + \frac{nr}{n^2 - 1} \right)^2 + \eta_s^2 = r^2 \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^2$$

C'est l'équation d'une circonférence de rayon $r \frac{n^2}{n^2 - 1}$ et dont le centre est à $-\frac{nr}{n^2 - 1}$ au-delà de l'origine.

b. Foyers tangentiels.

On a, de même,

$$\xi_t = x + \frac{nr + x}{n^2 - 1} \left(\frac{x}{r} \right)^2$$

$$\eta_t = y + \frac{y}{n^2 - 1} \left(\frac{x}{r} \right)^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

L'une des deux premières équations de ce système peut être remplacée par la suivante, obtenue en égalant les deux valeurs de $\left(\frac{x}{r} \right)^2$ que l'on en tire

$$\frac{\eta_t - y}{y} = \frac{\xi_t - x}{nr + x}$$

L'élimination de y dans le système ainsi modifié donne

$$\eta_t^2 (nr + x)^2 = (r^2 - x^2) (\xi_t + nr)^2$$

$$x^2 (nr + x) = r^2 (\xi_t - x) (n^2 - 1)$$

Ces équations ne sont pas, en général, celles d'une circonférence. On peut les écrire

$$\xi_i = \frac{x^2(nr + x) + r^2x(n^2 - 1)}{r^2(n^2 - 1)}$$

$$\eta_i^2 = \frac{(r^2 - x^2) \left(\frac{x^2(nr + x) + r^2x(n^2 - 1)}{r^2(n^2 - 1)} + nr \right)^2}{(nr + x)^2}$$

Si l'on se borne à considérer des angles i' assez faibles pour que, posant $x = r - \varepsilon$ on puisse négliger les termes en ε^2 , on trouve

$$\xi_i - \frac{rn}{n - 1} = -\varepsilon \frac{n^2 + 2(n + 1)}{n^2 - 1}$$

$$\eta_i^2 = \frac{2\varepsilon rn^4}{(n^2 - 1)^2}$$

Eliminant ε entre ces deux relations on trouve l'équation de la parabole

$$\eta_i^2 = - \left(\xi_i - \frac{rn}{n - 1} \right) \frac{2rn^4}{(n^2 - 1) [n^2 + 2(n + 1)]}$$

7. EQUATION DU LIEU DES FOCALES. — Dans le cas que nous avons considéré plus haut où les focales objets se trouvaient sur une circonférence, on peut aussi écrire l'équation du lieu des focales images. C'est une circonférence si l'on a, avec β donné quelconque

$$s = a' \times C^{te} = \frac{a'}{\beta}$$

D'où

$$\frac{1}{s'} = -\frac{n^2 - 1}{a'} + \frac{\beta}{a'} = \frac{1}{a'} [\beta - (n^2 - 1)]$$

Et l'on peut partir de cette relation en opérant comme dans le cas particulier que l'on a considéré plus haut.

8. REMARQUE. — Il est important de remarquer qu'un dioptré utilisé en son point aplanétique ayant comme lieu de foyers sagittaux

(dans un plan axial) une circonférence, un second dioptré (faisant en fait partie d'un ménisque), utilisé après le premier comme il a été dit au n° 1 donne aussi, en vertu de ce qui précède, une circonférence comme lieu définitif des foyers de la combinaison.

On peut donc s'attendre à ce que, dans un objectif de microscope puissant, la surface focale sagittale de la combinaison située avant les lentilles achromatisée soit sensiblement une sphère.

Pour l'ensemble de l'objectif, on constate par le calcul numérique que l'astigmatisme sur la surface focale définitive est très réduit dans certains cas, les surfaces focales en question étant voisines de sphères dont le rayon est de l'ordre de la distance focale de Gauss de l'objectif.

Dépolarisation produite par une suspension de particules isotropes sur un faisceau de lumière polarisée observé dans la direction de propagation

PAR

M. AUGUSTIN BOUTARIC et M^{lle} PAULETTE BERTHIER

Lorsqu'on interpose sur un faisceau de lumière polarisée une cuve à faces parallèles renfermant une suspension de particules isotropes et homogènes, on constate que le faisceau de lumière transmise éprouve une dépolarisation d'autant plus intense que la suspension est plus concentrée et la cuve plus épaisse. Nous nous sommes proposé de développer une théorie de ce phénomène et de la soumettre au contrôle de l'expérience.

THÉORIE.

1^o) Considérons une suspension de particules diffusantes, homogènes, isotropes et sans couleur propre, que traverse un faisceau de lumière polarisée dont le vecteur électrique, que nous supposons vertical pour fixer les idées, a une intensité I_0 à l'entrée de la cuve contenant la suspension. Désignons par I et i les intensités du vecteur électrique vertical et du vecteur électrique horizontal après que le faisceau a traversé une épaisseur x de la suspension. En traversant une couche de cette suspension d'épaisseur dx , le vecteur électrique vertical d'intensité I éprouve une diminution $-kIdx$ provenant de sa diffusion sur les particules contenues dans la couche et une augmentation $k'idx$ provenant de ce que la diffusion par les particules de la composante électrique horizontale i peut comporter une composante verticale. De même l'intensité de la composante horizontale i éprouve une diminution $-kidx$ provenant de sa diffusion sur les

particules et un accroissement $k'I dx$ provenant de ce que la diffusion de la composante verticale peut fournir une composante horizontale :

$$(1) \quad dI = -kI dx + k' i dx$$

$$(2) \quad di = -k i dx + k' I dx$$

k et k' sont des coefficients positifs, le coefficient k' étant évidemment inférieur à k . Des équations précédentes on tire :

$$(3) \quad d(I + i) = -(k - k') (I + i) dx$$

$$(4) \quad d(I - i) = -(k + k') (I - i) dx$$

qui, par intégration, fournissent :

$$(5) \quad \log_e \frac{I + i}{I_0} = -(k - k')x$$

$$(6) \quad \log_e \frac{I - i}{I_0} = -(k + k')x$$

d'où l'on tire :

$$(7) \quad \log_e \frac{I - i}{I + i} = -2k'x$$

La mesure du coefficient de dépolariation peut s'effectuer au moyen d'un photopolarimètre de Cornu réglé de manière que les sections principales du prisme biréfringent soient l'une verticale et l'autre horizontale ⁽¹⁾; on obtient l'égalité de brillance des plages pour une rotation α du nicol analyseur telle qu'on ait :

$$\frac{i}{I} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

L'équation (7) devient alors :

$$\log_e \cos 2\alpha = -2k'x$$

Si la théorie était exacte, le logarithme de $\cos 2\alpha$, pour la lumière transmise par une cuve contenant une suspension homogène et isotrope, devrait varier proportionnellement à l'épaisseur de la cuve. Les mesures faites sur des suspensions de latex de caoutchouc montrent

(1) A. BOUTARIC, *Revue générale des sciences* 1942/1945, t. LII, p. 124. Pour l'étude de la dépolariation longitudinale produite par les suspensions voir également : PROCOPIU, *C. R. Académie des sciences de Paris*, 1921, t. CLXXIII, p. 409 et 1935, t. CCI, p. 55; *Annales de physique*, 1921, t. I, p. 270, *Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, 1931, t. XVII, p. 111; *C. R. de l'Académie des sciences de Roumanie*, 1938, t. II, p. 137.

que cette proportionnalité ne se vérifie que pour de faibles épaisseurs de la cuve et qu'ensuite $-\log \cos 2\alpha$ croît plus rapidement que x .

20) La théorie précédente néglige l'apport de lumière entièrement dépolarisée que les particules contenues dans la tranche dx reçoivent des particules réparties dans l'épaisseur x de suspension déjà traversée par le faisceau. Cette quantité de lumière est difficile à connaître exactement. On peut la considérer comme une fonction de l'épaisseur x de suspension déjà traversée, qui s'annule pour $x = 0$ et pour x infiniment grand; nous la représenterons par $e^{-(k-k')x} f(x)$, la fonction $f(x)$ étant une fonction entière des puissances croissantes de x de la forme $f(x) = ax + bx^2 + \dots$. Les équations (1) et (2) deviennent alors :

$$(1bis) \quad dI = -kI dx + k' i dx + e^{-(k-k')x} f(x) dx$$

$$(2bis) \quad di = -k i dx + k' I dx + e^{-(k-k')x} f(x) dx$$

on en tire :

$$(3bis) \quad d(I + i) = -(k - k')(I + i) dx + 2e^{-(k-k')x} f(x) dx$$

$$(4bis) \quad d(I - i) = -(k + k')(I - i) dx$$

qui par intégration fournissent :

$$I + i = e^{-(k-k')x} [I_0 + F(x)]$$

$F(x)$ étant de la forme $Ax^2 + Bx^3 + \dots$

$$I - i = I_0 e^{-(k+k')x}$$

ce qui fournit

$$\frac{I - i}{I + i} = \frac{e^{-2k'x}}{1 + \frac{F(x)}{I_0}} = \frac{e^{-2k'x}}{1 + Px^2 + Qx^3 + \dots}$$

P, Q désignent des coefficients numériques. On en tire :

$$\log_e \frac{I - i}{I + i} = -2k'x - \log_e (1 + Px^2 + Qx^3 + \dots)$$

Pour des valeurs de x peu considérables, on peut développer le terme $\log_e (1 + Px^2 + Qx^3 + \dots)$ en fonction des puissances croissantes de x et limiter le développement à ses premiers termes, ce qui fournit :

$$-\log_e \frac{I - i}{I + i} = 2k'x + Px^2 + Qx^3 + \dots$$

$$-\frac{1}{x} \log_e \cos 2\alpha = 2k' + Px + Qx^2 + \dots$$

Pour des épaisseurs peu importantes, on peut négliger le dernier terme et admettre :

$$-\frac{1}{x} \log_e \cos 2\alpha = 2k' + Px$$

$-\frac{1}{x} \log \cos 2\alpha$ variera linéairement en fonction de l'épaisseur x de la cuve, de faibles écarts par rapport à la loi linéaire pouvant se produire pour de grandes valeurs de x .

3^e) La diffusion se produisant sur les particules en suspension, les quantités de lumière absorbées ou produites par cette diffusion dans une couche élémentaire, peuvent être considérées en première approximation comme proportionnelles à cette concentration. En désignant par n le nombre de particules par unité de volume, on pourra mettre les équations précédentes sous la forme :

$$(1^{ter}) \quad dI = -hId(nx) + h'Id(nx) + e^{-(h-h')nx} f(nx)$$

$$(2^{ter}) \quad di = -hid(nx) + h'Id(nx) + e^{-(h-h')nx} f(nx)$$

h et h' désignant de nouvelles constantes. On obtient finalement :

$$(9) \quad -\log \cos 2\alpha = Anx + Bn^2x^2 + \dots$$

qui permet d'étudier l'influence de l'épaisseur pour une suspension de concentration invariable et l'influence de la concentration de la suspension prise sous la même épaisseur. La formule (9) qui est symétrique par rapport à n et x semblerait indiquer que la dépolarisation dépend uniquement du produit nx de la concentration de la suspension par l'épaisseur de la cuve. Cependant il ne paraît pas douteux que l'influence de la diffusion secondaire, pour une valeur déterminée du produit nx , sera plus importante quand ces particules seront resserrées (forte concentration et faible épaisseur) que lorsqu'elles seront éloignées (faible concentration et grande épaisseur), en raison de l'affaiblissement qu'éprouve l'intensité de la lumière diffusée qu'une particule reçoit de l'ensemble des autres particules lorsque la distance moyenne des particules augmente.

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

Nous avons effectué un certain nombre de mesures sur des suspensions de globules de caoutchouc obtenues en diluant du latex dans

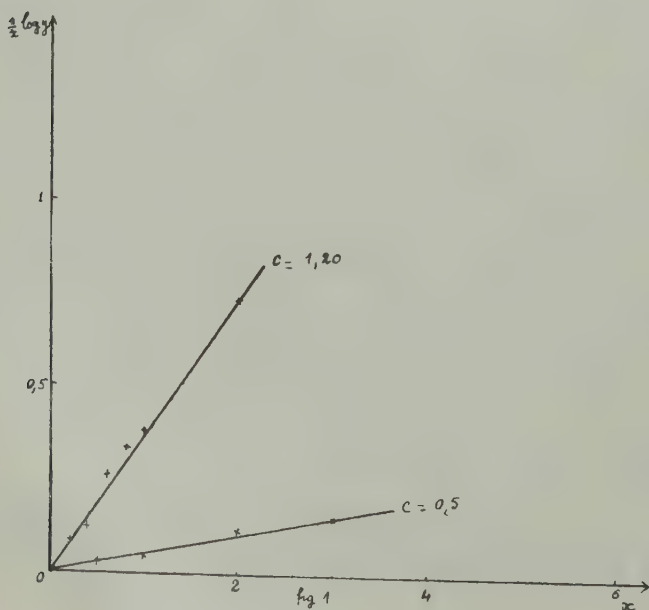
une solution ammoniacale et sur des émulsions d'huile de ricin dans l'eau, préparées en versant goutte à goutte dans de l'eau distillée une solution alcoolique d'huile de ricin.

1°) *Suspensions de globules de caoutchouc.*

Nous avons déterminé la proportion y de lumière polarisée contenue dans la lumière transmise par des cuves de diverses épaisseurs x renfermant des suspensions de diverses concentrations c (en grammes par litre). Les résultats sont indiqués dans le tableau I pour $\lambda = 520m\mu$.

TABLEAU I

$c = 0,5$			$c = 1,20$		
x	$-\log y$	$-\frac{1}{x} \log y$	x	$-\log y$	$-\frac{1}{x} \log y$
0,5 cm	0,0131	0,026	0,2 cm	0,0017	0,085
1	0,0393	0,039	0,4	0,0502	0,125
2	0,2205	0,110	0,6	0,1582	0,264
3	0,4264	0,142	0,8	0,2639	0,330
			1	0,3740	0,374
			2	1,4572	0,728

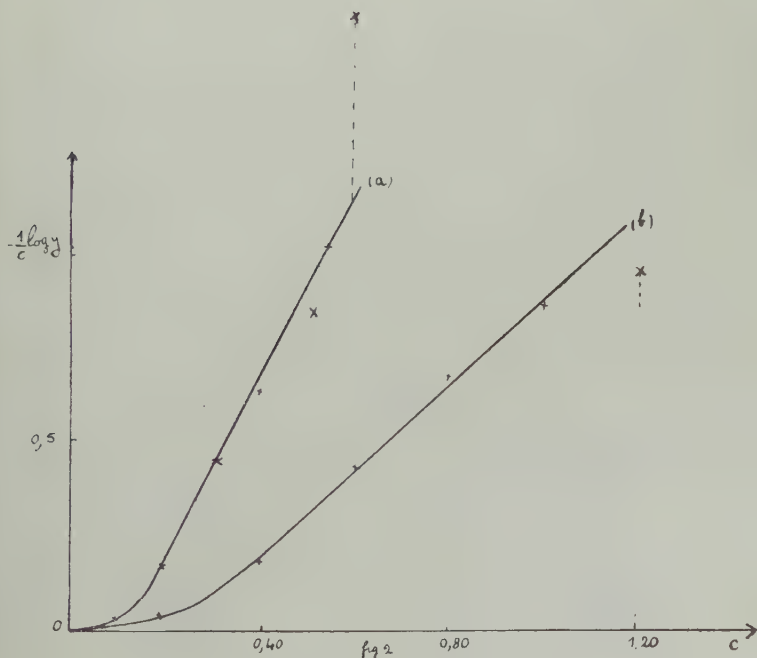


Les valeurs de $\frac{-1}{x} \log y$ représentées en fonction de x se disposent sur des droites dont le coefficient angulaire augmente avec la concentration c de la suspension et qui passent approximativement par l'origine, en sorte que le coefficient k' est très faible (fig. 1).

Nous avons étudié dans une cuve de 3 cm d'épaisseur comment varie la proportion de lumière polarisée contenue dans le faisceau transmis en fonction de la concentration c de la suspension.

TABLEAU II

c	$-\log y$	$\frac{-1}{c} \log y$
0,20	0,0328	0,164
0,30	0,1359	0,453
0,40	0,2524	0,631
0,50	0,4264	0,853
0,55	0,5597	1,017
0,66	0,9808	1,633



En représentant les valeurs de $-\frac{1}{c} \log y$ en fonction de c , les points se disposent sur une courbe qui passe approximativement par l'origine (fig. 2).

Nous avons comparé les valeurs de y fournies par des mesures portant sur des suspensions de concentrations différentes étudiées dans des cuves d'épaisseurs telles que le produit cx ait la même valeur.

TABIEAU III

c	x	y	c	x	y
1,20	1	0,454	2	0,5	0,358
0,6	2	0,485	1	1	0,485
0,4	3	0,574	0,5	2	0,574
0,24	5	0,602	0,33	3	0,695
0,12	10	0,616	0,2	5	0,707
			0,1	10	0,707

A mesure que la concentration c augmente, le produit cx demeurant invariable, la proportion y de lumière polarisée diminue et $-\log y$ augmente.

2^o) *Emulsion d'huile de ricin.*

Les résultats des mesures sont rassemblés dans les tableaux IV, V et VI.

Le tableau IV donne pour deux concentrations de l'émulsion les valeurs de $-\log y$ et $-\frac{1}{x} \log y$ pour diverses épaisseurs x . Les points représentant $-\frac{1}{x} \log y$ en fonction de x se disposent sensiblement sur des droites.

TABIEAU IV

$c = 0,60$			$c = 1,20$		
x	$-\log y$	$-\frac{1}{x} \log y$	x	$-\log y$	$-\frac{1}{x} \log y$
1 cm	0,0096,	0,010	0,5	0,1350	0,272
2	0,1289	0,064	1	0,2982	0,298
3	0,2524	0,084	2	0,7194	0,360
5	1,4572	0,291	3	1,1564	0,385

Le tableau V donne pour une cuve de 3 cm d'épaisseur les valeurs de $-\log y$ et $-\frac{1}{c} \log y$ pour diverses concentrations c , les résultats sont représentés graphiquement sur la courbe (b) de la figure 2.

TABEAU V

c	$-\log y$	$-\frac{1}{c} \log y$
0,40	0,0718	0,179
0,60	0,2525	0,421
0,80	0,5341	0,668
1,0	0,8564	0,856
1,2	1,1564	0,964

Dans le tableau VI on a rassemblé les mesures se rapportant à des concentrations et des épaisseurs différentes telles que le produit cx soit invariable. Là encore à mesure que la concentration augmente, pour un même nombre total de particules, la valeur de y diminue.

TABEAU VI

	x	y
2	0,5	0,515
1	1	0,799
0,5	2	0,829
0,33	3	0,899
0,2	5	0,906

CONCLUSION.

En résumé les suspensions ou les émulsions, même dans le cas où les particules ou les globules ne peuvent être considérés comme présentant une anisotropie quelconque, exercent une action dépolarisante très nette sur un faisceau de lumière polarisée qui les traverse. La proportion de lumière polarisée que renferme le faisceau transmis, diminue à mesure que croissent l'épaisseur ou la concentration de la suspension, l'influence de la concentration étant prédominante pour une même valeur du produit de la concentration par l'épaisseur de la cuve.

*Faculté des sciences de Dijon.
Laboratoire de Chimie-Physique.*

Azéotropes orthobares de nitrates

PAR

MAURICE LECAT

Annoncé dans une pareille note sur les nitrites (1946) ⁽¹⁾, ce travail consigne 122 azéotropes orthobares, dont *un* constituant est un nitrate.

Il est question ici des nitrates ⁽²⁾ : de méthyle (22 azéotropes), d'éthyle (34), de propyle (24), d'isobutyle (20) et d'isoamyle (22), appariés à des acides (6 azéotropes), à des alcools (30), à des alcools-oxydes (6), à des esters (4), à des halogénures (32), à des hydrocarbures (24), à des nitrodérivés (3), à des oxydes (7), à des sulfodérivés (3) et à l'uréthane (1 seul azéotrope).

Comme dans nos travaux congénères, les résultats sont consignés dans des tableaux (voir la note sur les nitrites).

Nous colligeons aussi des cas de zéotropie, au nombre de 68, se répartissant comme suit : nitrates de méthyle (13), d'éthyle (20), de propyle (5), d'isobutyle (7) et d'isoamyle (23); acide (1), alcools (2), alcools-oxydes (4), une aldéhyde (1), une cétone (1), esters (5), esters halogénés (3), esters-oxydes (3), halogénures (25), hydrocarbures (10), un nitrodérivé (1), oxydes (7) et sulfodérivés (4).

Les nitrates ne nous ont pas donné un seul cas d'azéotrope *négatif*. Quant aux zéotropes, il y a deux seuls cas de négativité; et encore douteux (n^{os} 8 et 9).

Il y a souvent des abaissements azéotropiques très considérables. Citons quelques exemples. Dans les alcools : le nitrate de méthyle avec le méthanol : $\delta = 12,15$; le nitrate d'éthyle avec l'éthanol, 6,45 et 5,4 avec l'isopropanol; avec le propanol : 5,13. — Dans les hydrocarbures : le nitrate de méthyle avec l'hexane : 8,8; avec le diisopropyle : 7,0; avec le méthylcyclopentane, aussi 7,0. Le nitrate de propyle avec le diisobutyle : 8,2. Le nitrate d'éthyle avec le cyclohexane : 6,5. — Le sulfure de carbone apparié avec le nitrate de méthyle fournit un abaissement de 6,45. — Le nitrate d'isobutyle donne avec le méthylglycol un abaissement $> 8,5$; le nitrate d'isoamyle avec le propylglycol : $> 6,5$. Quant aux hétéroazéotropes avec l'eau : le nitrate de propyle fournit 15,2; le nitrate d'éthyle, 13,33; le nitrate d'isobutyle, 11,2.

⁽¹⁾ Voir la Bibliographie, page 130.

⁽²⁾ Nous espérons bien pouvoir considérer, un peu plus tard, au moins les nitrates d'isopropyle, de butyle et d'hexyle.

La confrontation avec les nitrites est intéressante. Le travail y relatif consigne seulement 53 azéotropes et pas moins de 119 cas de zéotropie.

Rappelons qu'avec les nitrites les azéotropes se répartissent comme suit : nitrite d'éthyle (4 azéotropes), nitrites d'isopropyle (7), d'isobutyle (10), de butyle (11) et d'isoamyle (10), appariés à des cétones (4 azéotropes), à des esters (8 azéotropes homofonctionnels), à des halogénures (18), à des hydrocarbures (17), à des oxydes (3) et à des sulfodérivés (3) (1).

Rappelons surtout que les plus forts abaissements sont presque toujours beaucoup plus petits qu'avec les nitrates. Le nitrite d'éthyle avec l'isopropyléthylène donne : 1,9; le nitrite d'isopropyle avec le pentane : 1,65; le nitrite de propyle avec le cyclopentane : 2,25; le nitrite d'isobutyle avec l'hexane : 2,1; le nitrite de butyle avec le cyclohexane : 1,7; le nitrite d'isoamyle avec l'heptane : 2,35. Toutefois, avec le sulfure de carbone, le nitrite d'isopropyle donne 4,6 et le nitrite de propyle : 6,1. Quant aux halogénures, ce n'est qu'avec le nitrite de butyle que nous avons trouvé des abaissements d'au moins 1,2 : le tétrachlorure de carbone donne 1,45 et le chlorure de butyle 1,2.

De tous les esters monovalents, ce sont les nitrates qui donnent de loin les courbes δ les plus élevées. C'est déjà remarquable avec les acides et avec les halogénures; mais c'est encore bien plus frappant avec les alcools, avec les alcools-oxydes et avec les hydrocarbures. Pour les nitrites, les courbes δ sont très considérablement en-dessous.

Abréviations. — Az. = azéotropie; z. = zéotropie; f. = fortement; m. = moyennement; l. = légèrement; la qualification de positivité est sous-entendue (s'il y a lieu). ∞ = à peu près.

M = méthyle; É = éthyle; i. P = isopropyle; P = propyle; i. B = isobutyle; i. A = isoamyle.

F signifie que la variation de température à la mixtion n'a pas été prise, le point de fusion d'un constituant au moins étant trop élevé (dépassant notablement 20°).

Le sigle o. s. réfère à la rubrique « opérer sur : » de notre ouvrage L'Azéotropisme (1918) — épuisé depuis de longues années. Cette abréviation signifie que l'azéotropie du système considéré a été annoncée, dans ce livre, par le « lardage » du nom du constituant afférent.

L'astérisque devant le sigle (voir, par exemple, au n° 4) signifie que dans le travail indiqué, les résultats sont moins exacts que dans le présent mémoire. Il en est de même pour les zéotropes.

(1) Avec les nitrites, les alcools : ou bien réagissent, ou bien donnent lieu à une zéotropie certaine *a priori*.

BIBLIOGRAPHIE

I. Cf. Bibliographie de l'Azéotropie, t. I (1932) et t. II (1942), Bruxelles, Lamertin (*épuisé*).

- 551 — *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* (Ann.) Série B, t. 47 (1927), 1^{re} partie, pp. 63-71.
554 — *Ann. Série B*, t. 47, 1^{re} partie, pp. 149-158.
556 — *Ann. Série B*, t. 48 (1928), 1^{re} partie, pp. 13-22.
558 — *Ann. Ibid.*, pp. 54-62.
560 — *Ann. Ibid.*, pp. 113-126.
561 — *Ann. Série B*, t. 49 (1929), pp. 17-27.
568e — *Ann. Série B*, t. 55 (1935), pp. 253-265.
568f — *Ann. Série B*, t. 56 (1936), pp. 41-54.

II. Travaux postérieurs à la Bibliographie de l'Azéotropie.

- Ac. B. '43 — *Académie R. de Belgique. Bulletin. de la Classe des Sciences.* (5) 39 (1943), pp. 273-289.
Ac. B. Mé. — *Acad. R. Belg. Cl. des Sc. Mémoires.* Collection in-8° (2) 21 (1943/4).
C. R. I. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris), t. 222 (1946, 1^{er} sem.), pp. 733-734.
C. R. II — *Comptes rendus Acad. Sc.* (Paris), *ibid.*, pp. 882-883.
Homo. — *Ann. Série I*, t. 60 (1940-46), fasc. 3 (juillet '46), pp. 155-162.
Nitrites — *Ann. Ibid.*, pp. 163-168.
C. R. IV — *Comptes rendus Acad. Sc.* (Paris), t. 223 (1946, 2^e sem.), pp. 286-288.
A. Ch. — *Annales de Chimie* (Paris). Série 12, t. 2 (1947), pp. 158-202.
Nitro. — *Ann. Série I*, t. 61 (1947), pp. 79-98.
Ox. — *Ann. Ibid.*, pp. 153-162.
Sulf. — *Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sc.* (5) 43 (1947), pp. 160-183.
Esters et Oxydes. — *Ann. Série I*, t. 61 (1947), pp. 255-262.
-

Acides

(A) ÉTHANOÏQUE (ACÉTIQUE) (118,1)

B	Éb.B	Δ	Éb. az.	δ	% A	M	Bibl.
Nitrate propyle	110,5	7,6	107,5	3,0	23	20 : 0,5	— [1]
Nitrate isobutyle	123,5	5,4	114,2	3,9	50	50 : 1,0	— [2]

ZÉOTROPIE. — Nitrate É (87,7; 30,4), t. f. [10 : 0,4] (A. Ch., b 490) [I].

PROPANOÏQUE (141,3)

Nitrate isobutyle	123,5	17,8	122,0	1,5	9	10 : 0,2	— [3]
Nitrate isoamyle	149,75	8,45	138,8	2,5	59	85 : 0,3	*561, 50 [4]

MÉTHYL-2 PROPANOÏQUE (ISOBUTYRIQUE) (154,6)

Nitrate isoamyle	149,75	4,85	146,2	3,55	30	30 : 0,5	C.R.II, 32 [5]
------------------	--------	------	-------	------	----	----------	-----------------

BUTANOÏQUE (164,0)

Nitrate isoamyle	149,75	14,25	147,85	1,9	12	10 : 0,5	C.R.II, 34 [6]
------------------	--------	-------	--------	-----	----	----------	-----------------

Alcools

MÉTHANOL (64,65)

Nitrate méthyle	64,8	0,15	52,5	12,15	27	80 : 2,5	— [7]
Nitrate éthyle (1)	87,68	23,05	61,77	2,88	57	82 : 1,6	*556, 37 [8]

(1) Pour la mixtion, on a aussi : 60 : 3,2. La densité de l'az. est $d_4^0 = 0,9470$.

ÉTHANOL (78,3)

Nitrate méthyle	64,8	13,5	<59,5	>5,3	<36	—	— [9]
Nitrate d'éthyle	87,7	9,4	71,85	6,45	44	79 : 2,2	(1) [10]
Nitrate propyle	110,5	32,2	75,0	3,3	—	90 : 1,5	— [11]

(1) o. s.; 556, n° 38. Densité de cet az. : $d_4^0 = 0,9785$.

PROPANOL-2 (ISOPROPANOL) (82,42)

Nitrate méthyle	64,8	17,6	<62,5	>2,3	<22	—	— [12]
Nitrate d'éthyle	87,7	5,3	77,0	5,4	47	45 : 8,5	(1) [13]
Nitrate propyle	110,5	28,1	<81,5	>0,9	—	—	— [14]

(1) o. s.; 556, n° 39. La densité de cet az. est $d_4^0 = 0,9555$.

BUTANOL 3^{re} (TRIMÉTHYL CARBINOL) (82,45)

Nitrate méthyle	64,8	17,65	63,2	1,6	16	F	— [15]
Nitrate d'éthyle	87,7	5,25	78,1	4,35	55	F	(1) [16]

(1) o. s.; 556, n° 115; A. Ch., n° 480.

PROPÈNOL-3 (ALCOOL ALLYLIQUE) (96,85)

Nitrate d'éthyle	87,7	9,15	83,15	4,55	22,5	15 : 4,6	(¹)	[17]
(¹) o. s.; *556, n° 40; A. Ch., n° 23.								

PROPANOL-1 (97,2)

Nitrate d'éthyle	87,68	9,5	82,55	5,13	30	23 : 4,3	(¹)	[18]
Nitrate propyle	110,5	13,3	93,7	3,5	70	—	o. s.	[19]
(¹) o. s.; 556, n° 41.								

BUTANOL-2 (99,5)

Nitrate d'éthyle	87,7	11,8	84,8	2,9	22	10 : 3,6	A.Ch., 481	[20]
------------------	------	------	------	-----	----	----------	------------	-------

DIMÉTHYLÉTHYL CARBINOL (102,35)

Nitrate d'éthyle	87,7	14,65	< 87,0	> 0,7	> 5	5 : 1,8	A.Ch., 482	[21]
Nitrate propyle	110,5	8,15	< 100,1	> 2,25	> 77	—	—	[22]

ISOBUTANOL (108,0)

Nitrate d'éthyle	87,7	20,3	86,4	1,3	14,0	6,7 : 4,2	556, 36	[23]
Nitrate propyle	110,5	2,5	< 103,5	> 4,5	< 53	—	o. s.	[24]
Nitrate isobutyle	123,5	15,6	105,6	2,4	64	70 : 4,7	(¹)	[25]
(¹) *556, n° 54; Ac. B. '43, n° 178.								

BUTANOL-1 (117,8)

Nitrate d'éthyle	87,68	30,1	87,45	0,23	4	10 : 3,7	(¹)	[26]
Nitrate propyle	110,5	7,3	106,5	4,0	32	—	o. s.	[27]
Nitrate isobutyle	123,5	5,7	112,8	5,0	55	70 : 4,5	(²)	[28]
(¹) 558, n° 17; A. Ch., n° 122. — (²) *556, n° 53; A. Ch., n° 125.								

PENTANOL-2 (MÉTHYLPROPYL CARBINOL) (119,8)

Nitrate propyle	110,5	9,3	< 108,0	> 2,5	> 10	—	—	[29]
Nitrate isobutyle	123,5	3,7	< 115,3	> 4,5	> 52	50 : 5,5	—	[30]
ZÉOTROPIE. — Nitrate É (87,7; 32,1), m. [5 : 1,5] (A. Ch., b 490) [2].								

ISOBUTYL CARBINOL (ALCOOL ISOAMYLIQUE) (131,9)

Nitrate propyle	110,5	21,4	< 110,0	> 0,5	—	—	—	[31]
Nitrate isobutyle	123,5	8,4	< 120,0	> 3,5	26	25 : 5,5	*556, 107	[32]

PENTANOL-1 (ALCOOL AMYLIQUE NORMAL) (138,2)

Nitrate isobutyle	123,5	14,7	122,0	1,5	—	10 : 2,0	—	[33]
-------------------	-------	------	-------	-----	---	----------	---	-------

CYCLOPENTANOL (140,85)

Nitrate isobutyle	123,5	17,35	< 122,2	> 1,3	—	—	—	[34]
-------------------	-------	-------	---------	-------	---	---	---	-------

HEXANOL-1 (157,85)

Nitrate isoamyle	149,75	8,1	< 148,0	> 1,75	> 11	—	—	[35]
------------------	--------	-----	---------	--------	------	---	---	-------

CYCLOHEXANOL (160,8)

Nitrate isoamyle | 149,75 | 11,05 | <148,0 | >1,75 | — | — | — | o. s. | [36]

MÉTHYLCYCLOHEXANOL-1.2 (168,5)

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A (149,75; 18,75), q.-az. [5 : 0,7] [3].

Alcools-oxydes

MÉTHYLGLYCOL (124,5)

Nitrate propyle	110,5	14,0	108,0	2,5	20	—	Ac.B.Mé.	[37]
Nitrate isobutyle	123,5	1,0	<115,0	>8,5	<44	—	Ac.B.Mé.	[38]

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A (149,75; 25,25), q.-az. (Ox., b 78) [4].

ÉTHYLGLYCOL (135,3)

Nitrate isobutyle	123,5	11,8	121,0	2,5	18	—	Ac.B.Mé.	[39]
Nitrate isoamyle	149,75	14,45	133,7	1,6	72	—	A.Ch.,622	[40]

PROPYLGLYCOL (151,35)

Nitrate isoamyle | 149,75 | 1,6 | <143,5 | >6,25 | <43 | — | | Ac.B.Mé. | [41]

ZÉOTROPIE. — Nitrate d'i. B (123,5; 27,85), m. (*Ac. B. Mé.) [5].

ALCOOL FURFURIQUE (169,35)

Nitrate isoamyle | 149,75 | 19,6 | <149,6 | >0,15 | — | — | — | — | [42]

BUTYLGLYCOL (171,15)

ZÉOTROPIE. — Nitrate d'i. A (149,75; 21,4), q.-az. (Ox., b 78) [6].

MÉTHYLDIGLYCOL (192,95)

ZÉOTROPIE. — Nitrate d'i. A (149,75; 43,2), fortement [7].

Aldéhyde

ISOPENTANAL (ISOVALÉRALD.) (92,1)

ZÉOTROPIE. — Nitrate É (87,7; 4,4), m. (?) négative (A. Ch., b 490, p. 186) [8].

Cétone

MÉTHYLÉTHYLCÉTONE (BUTANONE) (79,6)

ZÉOTROPIE. — Nitrate É (87,7; 8,1), t. l. négative (?) [67 : — 0,2] (A. Ch., b 419) [9].

Eau

Nitrate méthyle	64,8	35,2	<61,5	> 3,3	<16	—	—	[43]
Nitrate d'éthyle	87,68	12,32	74,35	13,33	22	—	(1)	[44]
Nitrate propyle	110,5	10,5	84,8	15,2	25	—	*560,146	[45]
Nitrate isobutyle	123,5	23,5	88,5	11,5	28	—	*560,147	[46]
Nitrate isoamyle	149,75	49,75	95,0	5,0	40	—	—	[47]

(1) *551, n° 56 ("27); 560, n° 144 ("28).

Ce sont cinq *hétéroazéotropes*.

Esters

NITRATE D'ISOBUTYLE (123,5)

Propion. propyle	123,0	0,5	<121,7	>1,3	>41	—	Homo., 49	[48]
Form. d'isoamyle	123,8	0,3 ∞	<122,0	>1,5	>54	—	Homo., 50	[49]

NITRATE D'ISOAMYLE (149,75)

Isobutyr. isobut.	148,6	1,15 ∞	<147,5	>1,1	<40	—	Homo., 52	[50]
Hexoate méthyle	149,8	0,05 ∞	<148,5	>1,25	55 ∞	—	Homo., 52	[51]

ZÉOTROPIES. — Nitrate É (87,7) et carbon. M (90,25; 2,55), q.-az. (Homo., n° 97; A. Ch., b 490) [10].

Nitrate i. B (123,5) et carbon. É (126,5; 3,0), f. (Homo., 106) [11].

Nitrate i. A (149,75) et butyr. i. B (156,9; 7,15), m. (Homo., 123) [12]; et propion. d'isoamyle (160,7; 10,95), l. [13].

Nitrate P (47,75) et nitrite d'isopropyle (40,1; 7,65), ∞ idéale [10 : 0,0] (Nitrites, n° 165) [14].

Esters halogénés

NITRATE D'ISOAMYLE (149,75)

ZÉOTROPIES. — Chloracétate É (143,55; 6,2), f. [15]; bromacét. É (158,8; 9,05), f. [16]. — Dichloracét. É (158,1; 8,35), m. [17].

Esters-oxydes

ACÉTATE DE MÉTHYLGLYCOL (144,6)

Nitrate isoamyle	149,75	5,15	144,4	0,2	87	—	—	[52]
------------------	--------	------	-------	-----	----	---	---	-------

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. B (123,5; 21,1), l. [18].

ACÉTATE D'ÉTHYLGLYCOL (156,8)

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A (149,75; 7,05), quasi-azéotropie (positive) [19].

ACÉTATE DE MÉTHYL-1.3 BUTANE-DIOL (171,75)

(BUTOXYLE)

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A (149,75; 22,0), l. (A. Ch., b 166) [20].

Halogénures

BROMURE D'ÉTHYLE (38,4)

ZÉOTROPIE. — Nitrate de méthyle (64,8; 26,4), m. [21].

DICHLORMÉTHANE (CHLORURE DE MÉTHYLÈNE) (40,0)

ZÉOTROPIE. — Nitrate M (64,8; 24,8), l. (A. Ch., b 188) [22].

IODURE DE MÉTHYLE (42,5)

ZÉOTROPIE. — Nitrate M (64,8; 22,3), m. (A. Ch., b 332) [23].

CHLORURE D'ALLYLE (CHLOR-1 PROPÈNE-2) (45,3)

ZÉOTROPIE. — Nitrate de méthyle (64,8; 19,5), m. [24].

CHLORURE DE PROPYLE (46,65)

ZÉOTROPIE. — Nitrate de méthyle (64,8; 18,15), f. [25].

BROMURE D'ISOPROPYLE (59,4)

Nitrate méthyle | 64,8 | 5,4 | 57,3 | 2,1 | 68 | 50 : 3,7 | — | [53]

CHLORURE DE BUTYLE 2^{re} (68,25)

Nitrate méthyle | 64,8 | 3,45 | <62,0 | >2,8 | >36 | — | — | [54]

CHLORURE D'ISOBUTYLE (68,85)

Nitrate méthyle | 64,8 | 4,05 | 61,2 | 3,6 | 39 | 10 : 1,2 | — | [55]

ZÉOTROPIE. — Nitrate É (87,7; 18,85), m. [95 : 0,7] (*568f, 44; A. Ch., b 490) [26].

BROMURE D'ALLYLE (BROMO-1 PROPÈNE-2) (70,5)

Nitrate méthyle | 64,8 | 5,7 | 62,8 | 2,0 | 32 | 15 : 1,8 | — | [56]

ZÉOTROPIE. — Nitrate É (87,7; 17,2), f. [95 : 1,0] [27].

BROMURE DE PROPYLE (71,0)

Nitrate méthyle | 64,8 | 6,2 | 63,0 | 1,8 | 30 | 50 : 3,5 | — | [57]

Z. — Nitrate É (87,7; 16,7), m. [95 : 1,0] (*560, 243; A. Ch., b 490) [28].

IODURE D'ÉTHYLE (72,3)

Nitrate méthyle | 64,8 | 7,5 | <63,5 | >1,3 | >28 | — | — | [58]

BROMURE DE BUTYLE 3^{re} (73,25)

Nitrate méthyle | 64,8 | 8,45 | 63,8 | 1,0 | >20 | — | — | [59]

ZÉOTROPIE. — Nitrate É (87,7; 14,45), t. f. [95 : 0,8] (*568f, 45; A. Ch., b 490) [29].

TÉTRACHLORURE DE CARBONE (76,75)

Nitrate méthyle | 64,8 | 11,95 | <63,5 | >1,3 | — | 90 : 2,0 | — | [60]

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 10,95 | 74,95 | 1,8 | 84,5 | 80 : 3,0 | 556, 35 | [61]

CHLORURE DE BUTYLE (78,5)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 9,2 | <78,0 | >0,5 | >80 | 80 : 2,8 | (1) | [62]

(1) *568f, p. 45; A. Ch., n° 483 ('46).

ZÉOTROPIE. — Nitrate M (64,8; 13,7), t. f. [50 : 2,8] [30].

CHLORURE D'ÉTHYLÈNE (1.2-DICHLORÉTHANE) (83,45)

ZÉOTROPIE. — Nitrate M (64,8; 18,65), t. l. [90 : 0,8] [31]. — Nitrate É (87,7; 4,25), m. (?) p. [80 : 0,7] (*560, n° 244; A. Ch., b 490) [32].

FLUORBENZÈNE (84,9)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 2,8 | <82,5 | >2,4 | >58 | — | o. s. | [63]

ZÉOTROPIE. — Nitrate M (64,8; 20,1), m. [33].

TRICHLORÉTHYLÈNE (86,9)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 0,8 | 83,5 | 3,4 | 62 | 58 : 1,1 | A.Ch., 485 | [64]

IODURE D'ISOPROPYLE (89,45)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 1,75 | 83,2 | 4,5 | 48 | — | (1) | [65]

(1) *568f, p. 46 ('36); A. Ch., n° 484 ('46).

DICHLORBROMOMÉTHANE (90,1)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 2,4 | 86,85 | 0,85 | 35 | 78 : -0,2 | A.Ch., 486 | [66]

ZÉOTROPIE. — Nitrate M (64,8; 25,3), t. 1. [34].

BROMURE DE BUTYLE 2^{re} (91,2)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 3,5 | <85,5 | >2,2 | >32 | 10 : 1,8 | — | [67]

BROMURE D'ISOBUTYLE (91,4)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 3,7 | 85,0 | 2,7 | 35 | 10 : 1,5 | (1) | [68]

(1) o. s.; *568f, p. 46 ('36); C. R. II, n° 9 ('46).

ZÉOTROPIE. — Nitrate P (110,5; 19,1), m. [95 : 0,7] (*568f, p. 46) [35].

DIBROMOMÉTHANE (BROMURE DE MÉTHYLÈNE) (97,0)

ZÉOTROPIE. — Nitrate d'éthyle (87,7; 9,3), légèrement [36].

CHLORURE D'ISOAMYLE (99,4)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 11,7 | 87,55 | 0,15 | 8 | 10 : 1,8 | (1) | [69]

(1) *568f, p. 47 ('36); A. Ch., n° 487 ('46).

BROMURE DE BUTYLE (101,5)

Nitrate propyle | 110,5 | 9,0 | <101,0 | >0,5 | — | 90 : 1,6 | — | [70]

Z. — Nitrate É (87,7; 13,8), f. [5 : 0,8] (*568f, p. 47; A. Ch., b 490) [37].

IODURE D'ALLYLE (IOD-1 PROPÈNE-2) (101,8)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 14,1 | <87,0 | >0,7 | — | — | — | [71]

IODURE DE PROPYLE (102,4)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 14,7 | <87,4 | >0,3 | — | — | — | [72]

BROMURE D'ÉTHYLIDÈNE (1.1-DIBROMOÉTHANE) (109,5)

Nitrate propyle | 110,5 | 1,0 | <109,2 | >0,3 | >58 | — | — | [73]

IODURE DE BUTYLE 2^{re} (120,0)

Nitrate propyle | 110,5 | 9,5 | <109,5 | >1,0 | >15 | — | — | [74]

BROMURE D'ISOAMYLE (120,65)

Nitrate isobutyle | 123,5 | 2,85 | 118,0 | 2,65 | 68 | 80 : 2,0 | — | [75]

IODURE D'ISOBUTYLE (120,8)

Nitrate propyle | 110,5 | 10,3 | <109,5 | >1,0 | >11 | — | — | [76]

Nitrate isobutyle | 123,5 | 2,7 | <117,5 | >3,3 | >60 | — | — | [77]

PERCHLORÉTHYLÈNE (121,1)

Nitrate propyle	110,5	10,6	109,6	0,9	18	—	—	[78]
Nitrate isobutyle	123,5	2,4	117,45	3,65	70	61 : 0,7	(1)	[79]

(1) *568f, p. 48; Ac. B. '43, n° 181.

IODURE DE BUTYLE (130,4)

Nitrate isobutyle	123,5	6,9	<121,7	>1,8	>27	—	—	[80]
-------------------	-------	-----	--------	------	-----	---	---	-------

CHLORBENZÈNE (131,75)

ZÉOTROPIE. — Nitrate d'isobutyle (123,5; 8,25), moyennement [38].

BROMURE DE PROPÈNE (1.2-DIBROMOPROPANE) (140,5)

Z. — Nitrate i. A (149,75; 9,25), t. f. [90 : 0,5] (*568f, p. 49) [39].

TÉTRACHLORÉTHANE s. (TÉTRACHLORURE D'ACÉTYLÈNE) (146,2)

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A. (149,75; 3,55), ∞ idéale [12 : 0,05] [40].

IODURE D'ISOAMYLE (147,65)

Nitrate isoamyle	149,75	2,1	<144,5	>3,15	>57	—	o. s.	[81]
------------------	--------	-----	--------	-------	-----	---	-------	-------

BROMOFORME (TRIBROMOMÉTHANE) (149,5)

Nitrate isoamyle	149,75	0,25	144,8	4,7	57	55 : 1,8	(1)	[82]
------------------	--------	------	-------	-----	----	----------	-----	-------

(1) Ac. B. '43, n° 182.

BROMOBENZÈNE (156,1)

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A (149,75; 6,35), m. [20 : — 0,5] [41].

BROMURE D'HEXYLE (156,5)

Nitrate isoamyle	149,75	6,75	<148,5	>1,25	>20	10 : 1,0	—	[83]
------------------	--------	------	--------	-------	-----	----------	---	-------

TRICHLORHYDRINE (1.2.3-TRICHLORPROPANE) (156,85)

Nitrate isoamyle	149,75	7,1	<149,5	>0,25	>12	—	—	[84]
------------------	--------	-----	--------	-------	-----	---	---	-------

ORTHOCHLORTOLUÈNE (159,2)

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A (149,75; 9,45), m. [42].

PENTACHLORÉTHANE (162,0)

Z. — Nitrate i. A (149,75; 12,25), m. [94 : 0,3] (*561, n° 203, '29) [43].

PARACHLORTOLUÈNE (162,4)

Z. — Nitrate i. A (149,75; 12,65), l. (?) p. [5 : 0,6] (*568f, p. 51) [44].

BROMURE DE TRIMÉTHYLÈNE (166,9)

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A (149,75; 17,15), l. (?) p. (*568f, p. 51) [45].

Hydrocarbures

NITRATE DE MÉTHYLE (64,8)

Pentane normal	36,15	28,65	<35,5	>0,65	<10	—	—	[85]
Cyclopentane	49,4	15,4	<47,2	>2,2	>20	—	—	[86]
Diisopropyle	58,0	6,8	51,0	7,0	38	—	—	[87]
Hexane normal	68,8	4,0	56,0	8,8	56	—	—	[88]
M. cyclopentane	72,0	7,2	57,8	7,0	60	—	—	[89]
Cyclohexane	80,75	15,95	61,0	3,8	77	—	—	[90]

ZÉOTROPIES. — Heptane normal (98,4; 33,6), q.-az. (?) [46]. — Benzène (80,15; 15,35), f. p. [47].

NITRATE D'ÉTHYLE (87,7)

Hexane normal	68,8	18,9	66,25	2,55	23,5	25 : 4,6	(¹)	[91]
M. cyclopentane	72,0	15,7	68,7	3,3	20	—	—	[92]
Benzène	80,15	7,55	80,03	0,12	12	50 : 0,5	(²)(³)	[93]
Cyclohexadiène-1,3	80,4	7,3	<76	>4,4	<38	*568e, p. 257 ('35)		[94]
Cyclohexane	80,75	6,95	74,5	6,25	36	40 : 4,5	*560,34	[95]
Heptane norm.	98,4	10,7	82,8	4,9	63	72 : 3,5	(⁴)	[96]
M. cyclohexane	101,15	13,45	83,85	3,85	72	50 : 4,2	(⁵)	[97]
Diisobutyle	109,4	21,7	86,0	1,7	84	85 : 3,5	(⁶)	[98]

(¹) *560, n° 33 ('28); C. R. II, n° 3 ('46). — (²) Mixtion aussi : 21 : 0,35. — (³) 554, n° 37h ('27); C. R. IV, n° 34 ('46). — (⁴) *568e, p. 258 ('35); C. R. IV, n° 33 ('46); A. Ch., n° 488 ('46). — (⁵) Mixt. aussi : 5 : 1,4; 72 : 4,5. — 560, n° 73 ('28); C. R. IV, n° 62 ('46). — (⁶) *568e, p. 258 ('35).

ZÉOTROPIES. — Cyclopentane (49,4; 38,3), f. [20 : 3,0] (A. Ch., b 490) [48]; diméthyl-1,3 cyclohexane (120,7; 33,0), f. [49]. — Toluène (110,75; 23,05), m. (*568e, p. 259; A. Ch., b. 490) [50].

NITRATE DE PROPYLE (110,5)

Heptane normal	98,4	12,1	95,0	3,4	25	20 : 3,5	—	[99]
M. cyclohexane	101,15	9,35	97,0	4,15	25	10 : 1,8	—	[100]
Diisobutyle	109,4	1,1	101,2	8,2	45	70 : 3,0	—	[101]
Toluène	110,75	0,25	<109,0	>1,5	>47	—	o. s.	[102]

ZÉOTROPIE. — Benzène (80,15; 30,35), l. [10 : 0,1] [51].

NITRATE D'ISOBUTYLE (123,5)

DiM-1,3 cyclohexane	120,7	2,8	<114,5	>6,3	<41	—	—	[103]
---------------------	-------	-----	--------	------	-----	---	---	-------

ZÉOTROPIE. — Toluène (110,75; 12,75), m. [10,8; 0,0] [52]; É. benzène (136,15; 12,65), m. [10 : 0,2] [53].

NITRATE D'ISOAMYLE (149,75)

Phényléthylène	145,8	3,95	<145,6	>0,2	<38	—	o. s.	[104]
Pinène-α	155,8	6,05	147,75	2,0	65	76 : 1,0	(¹)	[105]
Camphène	159,6	9,85	149,0	0,75	72	F	—	[106]
Diisoamyle	160,1	10,35	<148,6	>1,15	<83	—	—	[107]
Pinène-β	163,8	14,05	149,2	0,55	80	75 : 1,2	—	[108]

(¹) Ac. B. '43, 185.

ZÉOTROPIES. — Métaxylène (139,2; 10,55), 1. [95 : <0,3] (*568e, p. 260; A. Ch., b 408) [54]; P. benzène (159,3; 9,55), 1. (*568e, p. 260) [55]. — Mésitylène (164,6; 14,85), ∞ idéale [56].

Nitrodérivés

NITROMÉTHANE (101,22)

Nitrate d'éthyle 87,68 | 13,54 | 87,66 | 0,02 | 1,2 | 13,8 : 0,5 | A. Ch., 489 [109]
Nitrate propyle 110,5 | 9,3 | 100,2 | 1,0 | 75 | 50 : 1,0 | Nitro., 134 [110]

NITROÉTHANE (114,2)

Nitrate propyle | 110,5 | 3,7 | <109,6 >0,9 >21 : — | Nitro., 136 [111]

ZÉOTROPIE. — Nitrate É (87,7; 26,5), m. [57].

Oxydes

MÉTHYLAL (42,3)

ZÉOTROPIE. — Nitrate M (64,8; 22,5), t. 1. (Esters et oxydes, b 3) [58].

ÉTHOXYPROPANE (OXYDE D'ÉTHYLE ET DE PROPYLE) (63,85)

Nitrate méthyle 64,8 | 0,95 | <61,5 >2,35 — | Esters et oxydes, 4 [112]

FORMAL MÉTHYLÉTHYLIQUE (65,9)

Nitrate méthyle 64,8 | 1,1 | <63,9 >0,9 — | Esters et oxydes, 5 [113]

ÉTHYLAL (FORMAL ÉTHYLIQUE) (87,95)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 0,25 | 85,85 | 1,85 | 51 | 45 : 0,3 | C.R. I, 58 [114]

OXYDE DE PROPYLE (90,1)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 2,4 | <87,0 >0,7 | <35 | — | o. s. (1) [115]

(1) A. Ch., n° 490 ('46); Esters et oxydes, n° 8 ('47).

DIOXANE (101,35)

ZÉOTROPIES. — Nitrate P (110,5; 9,15), 1. p. (Esters et oxydes, b 14) [59]. — Nitrate É (87,7; 13,65), t. 1. p. [10 : — 0,25] (A. Ch., b 224) [60].

ACÉTAL (103,55)

ZÉOTROPIE. — Nitrate É (87,7; 15,85), f. (*560, 268; Esters et oxydes, b 16) [61]; nitrate P (110,5; 6,95), f. (id.) [62].

FORMAL ÉTHYLPROPYLIQUE (113,7)

Nitrate propyle | 110,5 | 3,2 | <110,0 >0,5 — | Esters et oxydes, 17 [116]

OXYDE D'ISOBUTYLE (122,3)

Nitrate isobutyle | 123,5 | 1,2 | <121,0 >1,3 — | Esters et oxydes, 20 [117]

PARALDÉHYDE (124,35)

Nitrate isobutyle | 123,5 | 0,85 | <122,8 >0,7 — | Esters et oxydes, 24 [118]

ANISOLE (153,85)

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A (149,75; 4,1), f. [86 : 1,3; 16 : — 0,2 ∞] (*561, 218; Esters et oxydes, b 30) [63].

FORMAL ISOBUTYLIQUE (163,8)

ZÉOTROPIE. — Nitrate i. A (149,75; 14,05), l. (Esters et oxydes, b 30) [64].

Sulfodérivés

SULFURE DE CARBONE (46,25)

Nitrate méthyle | 64,8 | 18,55 | 39,8 | 6,45 | 71 | 70 : 6,0 | Sulf., 90 | [119]

ZÉOTROPIE. — Nitrate d'éthyle (87,7; 41,45), q.-az. [89,5 : 2,8 ∞; 90 : 3,0] (A. Ch., b 590) [65].

THIOFÈNE (84,7)

ZÉOTROPIES. — Nitrate É (87,7; 3,0), m. (A. Ch., b 592) [66]. — Nitrate M (64,8; 19,9), t. l. (Sulf., b 95) [67].

SULFURE D'ÉTHYLE (92,1)

Nitrate d'éthyle | 87,7 | 4,4 | 85,0 | 2,7 | 42 | — | Sulf., 96 | [120]

THIOFANE (118,8)

Nitrate propyle | 110,5 | 8,3 | 109,0 | 1,5 | 27 | ∞ | Sulf., 100 | [121]

SULFURE DE PROPYLE (141,5)

ZÉOTROPIE. — Nitrate d'isobutyle (123,5; 18,0), très f. [68].

Varia

CARBAMATE D'ÉTHYLE (URÉTHANNE) (185,25)

Nitrate isoamyle | 149,75 | 35,5 | 149,1 | 0,65 | 7 | Ac. B. '43, n° 8 | [122]

25 octobre 1948.

Uccle-Bruxelles,
Laboratoire privé de l'auteur.

TABLE DES MATIÈRES

Session du 29 janvier 1948, à Bruxelles	5
PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques ..	5
Sur l'intégration par approximations successives de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, par M. R. H. J. Germa	5
Remarques sur les fonctions orthogonales à toute fonction harmonique dans un domaine plan, à propos des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible, par M. J. Kampé de Fériet	11
Sur les hauteurs du tétraèdre, par M. V. Thébault	19
Sur une propriété d'une équation intégrale, par M. M. Parodi	24
DEUXIÈME SECTION : Sciences physiques et chimiques	27
La récession des nébuleuses extra-galactiques (2 ^e partie), par M. P. Dru- maux	27
Sur le calcul des véhicules redresseurs à deux lentilles identiques, par M. A. Biot	36
Séparation par une onde sonore des constituants d'un mélange de gaz de masses différentes, par M. Ph. Passau	40
Phénomènes d'adsorption dans les solutions colloïdales, par M. A. Bou- taric et M ^{lle} S. Fabry	47
Azéotropes binaires orthobares que forment des oxydes avec des hydro- carbures, par M. M. Lecat	55
Session du 15 avril 1948, à Bruxelles	61
PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques ..	61
Sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration de certains systèmes non linéaires d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, par M. R. H. J. Germa	61
Sur les sphères de Tücker du tétraèdre, par M. V. Thébault	67
DEUXIÈME SECTION : Sciences physiques et chimiques	74
Bureau de la Section pour 1948-49	74
La récession des nébuleuses extra-galactiques (3 ^e partie), par M. P. Dru- maux	74
Sur le condensateur à deux miroirs sphériques, par M. A. Biot	83
Azéotropes d'halogénures et d'oxydes, par M. M. Lecat	93

Session du 28 octobre 1948, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Sur des nombres curieux, par M. V. Thébault	101
Remarque sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles; extension à des systèmes normaux de forme générale (2 ^e note), par M. R. H. J. Germai	109

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

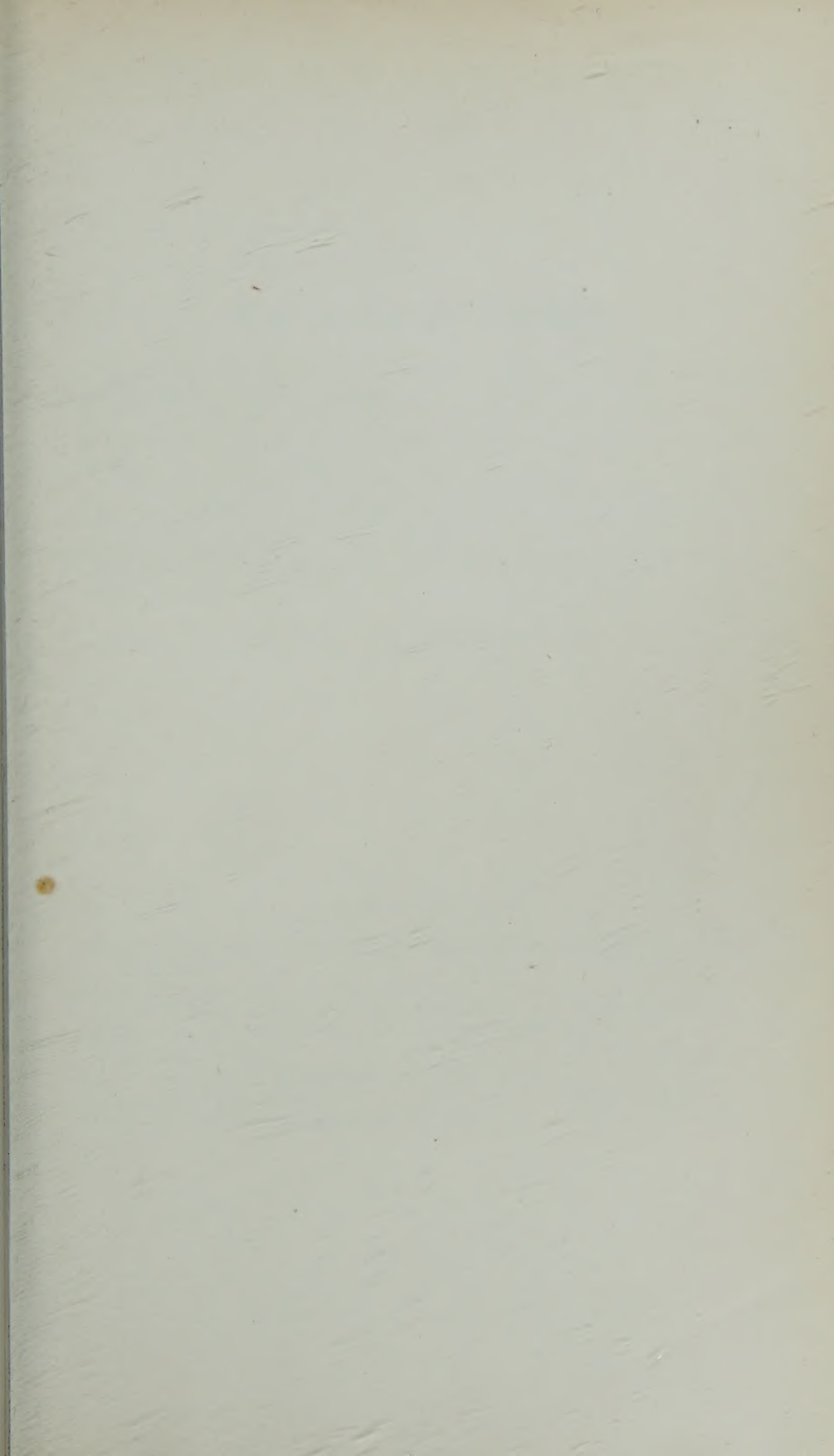
Sur un problème relatif à l'astigmatisme du dioptré, par M. A. Biot ...	114
Dépolarisation produite par une suspension de particules isotropes sur un faisceau de lumière polarisée observé dans la direction de propagation, par M. A. Boutaric et M ^{lle} P. Berthier	120
Azéotropes orthobares de nitrates, par M. M. Lecat	128

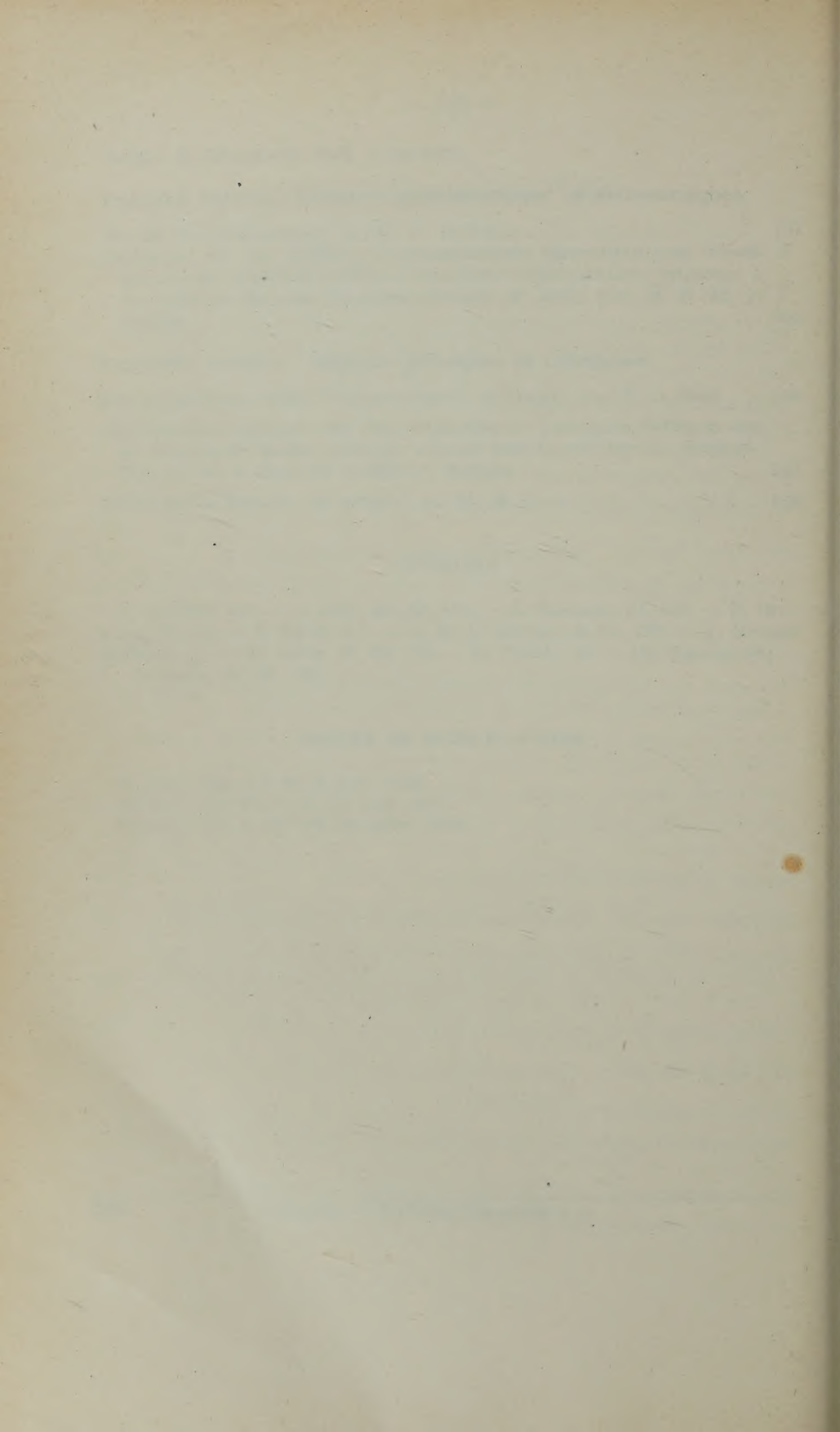
AUTEURS

P. Berthier, 120. — A. Biot, 36, 83, 114. — A. Boutaric, 47, 120. — P. Dru-
maux, 27, 74. — S. Fabry, 47. — R. H. J. Germai, 5, 61, 109. — J. Kampé
de Fériet, 11. — M. Lecat, 55, 93, 128. — M. Parodi, 24. — Ph. Passau, 40. —
V. Thébault, 19, 67, 101.

DATES DE PUBLICATION

1^e fasc. : pp. 1 à 60, 5 mars 1948.
2^e fasc. : pp. 61 à 100, 25 mai 1948.
3^e fasc. : 101 à 142, 30 décembre 1948.





Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la première série comprend 30 volumes (1877-1891) ; la deuxième, 20 volumes (1892-1901) ; la troisième, 30 volumes (1902-1921) ; la quatrième, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugure la cinquième série.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique.)

PRIX D'ABONNEMENT :

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
abonnement de soutien	500 francs
France et colonies françaises (s'adresser au Centre du Livre français, 1, rue de la Visitation, Paris 7 ^e) . . .	800 francs franç.
Suisse (s'adresser à la Librairie de l'Université, 6, rue Haldimand, Lausanne).	28 francs suisses
Canada (s'adresser aux Messageries France-Canada, 5466, avenue du Parc, Montréal 8).	6 dollars 50
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain) . . .	280 francs belges

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 150,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,
t. I à XXV (1875 à 1901) fr. 20,00
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) fr. 40,00

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,00

Série B (sc. physiques et naturelles) fr. 70,00

Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 100,00 — (1929 à 1933) fr. 40,00
(1934 à 1936) fr. 20,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,00
(1931 à 1936) fr. 100,00

Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXII (1937 à 1948) fr. 70,00

Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940,46) fr. 70,00

Série III (sc. économiques), tt. LVII à LIX (1937 à 1940,46) fr. 100,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels. fr. 200,00

Le fascicule trimestriel fr. 60,00

t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels fr. 200,00

Le fascicule fr. 40,00

t. CXVII (1940 et 1946), tt. CXVIII et CXIX (1947 et 1948).

Le volume fr. 200,00

Le fascicule fr. 60,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,

t. I à L (1877 à 1901) fr. 20,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) fr. 20,00

t. LXXXI à CX (1922 à 1936) fr. 30,00

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — **B. Tougarinoff.** Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations) — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : fr. 24,00
autres pays, 30,00 fr.

II. — **V. Schaffers.** Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. 24,00 ; autres pays, fr. 30,00.

IV. — **F. Kuisin et E. de Pierpont.** Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors-texte (1939) : en Belgique, fr. 24,00 ; autres pays, fr. 30,00. (épuisé)

MONOGRAPHIES MÉDICALES

I. — **M. Schillings.** Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. 70,00 ; autres pays, fr. 90,00

III. — **P. Van Gehuchten.** La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. 24,00 ; autres pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

I. — **A. Henry.** La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages fr. 20,00

II. — **A. Henry.** Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages fr. 10,00

III. — **A. Delperée.** La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages fr. 60,00